ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного параболического уравнения

$$u_t = \Delta u + a(x,t)u^r \int\limits_{\Omega} u^p(y,t)\,dy - b(x,t)u^q, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где r, p, l – положительные постоянные, $q > 1$, Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1) сделаны следующие предположения:

$$a(x,t), b(x,t) \in C^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad a(x,t) \geqslant 0, \quad b(x,t) \geqslant 0;$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad k(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u_0(x) = \int\limits_{\Omega} k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy, \quad x \in \partial\Omega.$$

Обозначим через λ_1 – первое собственное значение задачи

$$\Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Предположим, что

$$\int\limits_{\Omega} k(x,y,t)\,dy \leqslant A\exp(\sigma t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad A > 0, \quad \sigma < \lambda_1(l-1) \tag{2}$$

и

$$b(x,t) \geqslant Ba(x,t)\exp(-\omega t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad B > 0, \quad \omega < \lambda_1(r+p-q) \tag{3}$$

или

$$b(x,t) \leqslant \varepsilon(t)\exp[\lambda_1(q-1)t], \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon(t) \in C([0,\infty)), \quad \varepsilon(t) \geqslant 0, \quad \int\limits_0^{\infty} \varepsilon(t)\,dt < \infty, \tag{5}$$

$$k(x,y,t) \geqslant D\exp[\lambda_1(l-1)t], \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega, \quad D > 0 \tag{6}$$

для достаточно больших значений t.

Теорема 1. *Если* $l > 1$, $1 < q < r+p$ *и выполнены условия (2), (3), то существуют глобальные решения задачи (1) при достаточно малых начальных данных. Если* $l \geqslant q > 1$ *и выполнены условия (4)–(6), где* $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$, *то любое нетривиальное решение задачи (1) обращается в течение конечного времени в бесконечность.*

Пусть

$$\underline{a}(t) = \inf_{\Omega} a(x,t), \quad \overline{b}(t) = \sup_{\Omega} b(x,t).$$

Предположим, что

$$\underline{a}(t) = \gamma(t) \exp[\lambda_1(r+p-q)t]\overline{b}(t), \tag{7}$$

$$\int\limits_0^\infty \underline{a}(t) \exp[-\lambda_1(r+p-1)t]\, dt = \infty, \tag{8}$$

где $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\max(r,p) \geqslant q > 1$ *и выполнены условия (4), (5), (7), (8). Тогда любое нетривиальное решение задачи (1) обращается в течение конечного времени в бесконечность.*