ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

А.Л. Гладков, А.И. Никитин

Рассмотрим следующую систему полулинейных параболических уравнений с нелокальными граничными условиями

$$u_t = \triangle u + c_1(x,t)v^p, \quad v_t = \triangle v + c_2(x,t)u^q, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t)u(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t)v(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (1)$$

где p, q – положительные постоянные, $pq > 1$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ – неотрицательные локально непрерывные по Гельдеру функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ – неотрицательные непрерывные функции, определенные при $x \in \partial\Omega$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \geqslant 0$, и $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции, удовлетворяющие граничным условиям при $t = 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$f'(t) = r_1(t)g^p(t), \quad g'(t) = r_2(t)f^q(t), \quad t > a,$$

$$f(a) = f_a > 0, \quad g(a) = g_a > 0, \qquad (2)$$

где p, q, a – положительные постоянные, $r_1(t)$ и $r_2(t)$ – неотрицательные непрерывные при $t \geqslant a$ функции. Условия существования и отсутствия глобальных решений задачи (2) исследовались, например, в работах [1, 2].

Введем следующие обозначения:

$$\underline{c}_i(t) = \inf_{\Omega} c_i(x,t), \quad \underline{k}_i(t) = \inf_{\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} k_i(x,y,t)\,dS_x, \quad i = 1,2,$$

$$\underline{z}_1(t) = \underline{c}_1(t)\exp\left(p\int\limits_0^t \underline{k}_2(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t \underline{k}_1(\tau)\,d\tau\right),$$

$$\underline{z}_2(t) = \underline{c}_2(t)\exp\left(q\int\limits_0^t \underline{k}_1(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t \underline{k}_2(\tau)\,d\tau\right).$$

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ и задача (2) с $r_i(t) = \underline{z}_i(t)$, $i = 1,2$, при некотором a и любых f_a, g_a не имеет глобального решения. Тогда задача (1) не имеет нетривиального глобального решения.*

Обозначим
$$\tilde{k}_i(t) = |\partial\Omega| \inf_{\partial\Omega\times\Omega} k_i(x,y,t), \quad i = 1,2,$$
$$\tilde{z}_1(t) = \underline{c}_1(t)\exp\left(p\int_0^t \tilde{k}_2(\tau)\,d\tau - \int_0^t \tilde{k}_1(\tau)\,d\tau\right),$$
$$\tilde{z}_2(t) = \underline{c}_2(t)\exp\left(q\int_0^t \tilde{k}_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t \tilde{k}_2(\tau)\,d\tau\right).$$
Предположим, что существуют постоянные α, t_0, K, для которых выполнены неравенства $\alpha > t_0$ и
$$\int_{t-t_0}^{t} \frac{\tilde{k}_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \leqslant K \quad \text{для всех} \quad t \geqslant \alpha, \quad i = 1,2. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $pq > 1$, выполнены неравенства (3) и задача (2) с $r_i(t) = A_i\tilde{z}_i(t)$, $i = 1,2$, при некоторых a, $A_i > 0$, $i = 1,2$, и любых f_a, g_a не имеет глобального решения. Тогда задача (1) не имеет нетривиального глобального решения.*

Результаты опубликованы в работе [3].

Литература

1. Коньков А. А. *О некоторых априорных оценках для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера* // Мат. заметки. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 792–796.

2. Рабцевич В. А. *О быстрорастущих решениях систем Эмдена–Фаулера произвольного порядка* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 5. С. 222–227.

3. Гладков А. Л., Никитин А. И. *О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для системы полулинейный параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 88–107.