ИССЛЕДОВАНИЕ НА РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк

Данная работа посвящена изучению граничной задачи типа Дирихле на плоскости для уравнения третьего порядка определенного вида с постоянными коэффициентами в главной части, которая представляет собой суперпозицию гиперболического и эллиптических операторов со слагаемыми второго порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение неизвестной функции $u(x)$ переменных $x=(x_0,x_1,x_2)$ следующего вида:

$$\mathcal{L}_1(x,D)u+\mathcal{L}_2(x,D)u+\mathcal{L}_3(x,D)u=f(x), \tag{1}$$

где

$$\mathcal{L}_1(x,D)=p_0(x)\partial_{x_0}+p_1(x)\partial_{x_1}+p_2(x)\partial_{x_2}-\lambda(x),$$
$$\mathcal{L}_2(x,D)=c_0\partial_{x_0x_0}+c_1\partial_{x_1x_1}+c_2\partial_{x_2x_2}+d_0\partial_{x_0x_1}+d_1\partial_{x_0x_2}+d_2\partial_{x_1x_2},$$
$$\mathcal{L}_3(x,D)=(\partial_{x_0}+b_1\partial_{x_0}+b_2\partial_{x_0})(\partial_{x_0x_0}+a_1^2\partial_{x_1x_1}+a_2^2\partial_{x_2x_2}).$$

Здесь коэффициенты a_i, b_i $(i=1,2)$, $c_i,(i=0,1,2)$ постоянны, а $p_i(x)$, $\partial_{x_i}(p_i(x))$ $(i=0,1)$ измеримы и ограничены.

Обозначим через Ω произвольную ограниченную область рассматриваемой плоскости с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$.

Пусть $\mathcal{L}_0(\nu)=(\nu_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2)(\nu_0^2+a_1^2\nu_1^2+a_2^2\nu_2^2)$, где ν – единичный вектор внешней нормали в точках границы $\partial\Omega$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{\partial\Omega}=0, \quad \partial_\nu u|_{\partial\Omega^-}=0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ – часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\nu)<0$.

Наряду с задачей (1)–(2) будем рассматривать соответствующей ей сопряженную

$$\mathcal{L}^*\upsilon=g(x), \tag{3}$$

$$\upsilon|_{\partial\Omega}=0, \quad \partial_\nu\upsilon|_{\partial\Omega^+}=0, \tag{4}$$

где $\partial\Omega^+$ – часть границы, в точках которой $\mathcal{L}_0(\nu)>0$.

Задачи (1), (2) и (3), (4) будем рассматривать как решения операторных уравнений

$$\mathcal{L}u=f(x), \quad \mathcal{L}^*\upsilon=g(x),$$

с областями определения $\mathcal{D}(\mathcal{L})=H_0^3(\Omega)$ и $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*)=\mathring{H}^3(\Omega)$. Здесь $H_0^\ell(\Omega)$ $(\mathring{H}^\ell(\Omega))$ $(l=1,2,3)$ – подпространства пространства $H^\ell(\Omega)$, элементы которых удовлетворяют условиям (2) (условиям (4)).

Построим расширения L и L^* операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$ соответственно. Тогда решение полученных операторных уравнений назовем обобщенным решением задачи (1), (2) (задачи (3), (4)).

В работе получены достаточные условия разрешимости рассматриваемых задач, доказаны энергетические неравенства и с их помощью теоремы и существования и единственности обобщенного решения для прямой и сопряженной задач.

Литература

1. Корзюк В. И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения.* Мн.: БГУ, 2013.

2. Дайняк В. В., Корзюк В. И., Протько А. А. *Задача типа Дирихле уравнения третьего порядка* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. 2012. № 3. С. 116–121.