СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.Г. Замураев

Пусть C – множество функций, удовлетворяющих на отрезке $[0,T]$ условию Липшица с постоянной Липшица L, ограниченных некоторой постоянной α, $0<\alpha\leqslant a$, и таких, что $\forall t\in[0,T]$

$$\int\limits_t^T c(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^T c(\tau)\,d\tau = 0.$$

Рассмотрим локальную краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{1}$$

в области $\Omega(c)$, ограниченной отрезками характеристик уравнения (1) $x=at$, $0\leqslant t\leqslant$ $\leqslant T/2$, $x=a(T-t)$, $T/2\leqslant t\leqslant T$, и линией $\Gamma(c)$, заданной уравнением $x(t)=$ $=\int_0^t c(\tau)\,d\tau$, $0\leqslant t\leqslant T$, $c\in C$, со следующими однородными условиями на $\Gamma(c)$:

$$u|_{\Gamma(c)} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}\bigg|_{\Gamma(c)} = 0. \tag{2}$$

Заменой переменных $x=-(\eta-\xi)/2$, $t=T-(\eta+\xi)/(2a)$ краевая задача (1), (2) сводится к задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = g(\eta,\xi), \quad (\eta,\xi)\in\hat{\Omega}(c), \tag{3}$$

$$u|_{\hat{\Gamma}(c)} = \frac{\partial u}{\partial\eta}\bigg|_{\hat{\Gamma}(c)} = 0, \tag{4}$$

где $\hat{\Omega}(c)$ – область, ограниченная отрезками прямых $\eta=0$, $0\leqslant\xi\leqslant aT$, $\xi=aT$, $0\leqslant\eta\leqslant aT$, и линией $\hat{\Gamma}(c)$, заданной параметрическими уравнениями

$$\eta(t) = \int\limits_t^T (a+c(\tau))\,d\tau, \quad \xi(t) = \int\limits_t^T (a-c(\tau))\,d\tau, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Пусть $u_0(c)=u_0(c,\eta,\xi)\in L_2(\hat{\Omega}(c))$ – обобщенное решение задачи (3), (4), определяемое [1] как решение функционального уравнения

$$u\in L_2(\hat{\Omega}(c)), \quad \iint\limits_{\hat{\Omega}(c)} uv\,d\eta\,d\xi = -\iint\limits_{\hat{\Omega}(c)} g(\eta,\zeta)\int\limits_\xi^{aT}\int\limits_0^\eta v\,d\eta\,d\xi\,d\eta\,d\xi \quad \forall v\in L_2(\hat{\Omega}(c)). \tag{5}$$

Зададим функцию $u_d \in L_2(\hat{\Omega}(0))$, функционал

$$J(c,u) = \iint\limits_{\hat{\Omega}(c)} \left(u(\eta,\xi) - u_d(\eta,\xi)\right)^2 d\eta\, d\xi$$

и пусть $j(c) = J(c, u_0(c))$.

Рассматриваемая задача оптимизации состоит в отыскании функции $c \in C$, доставляющей минимальное значение функционалу $j(c)$ на множестве C. Данная задача относится к классу задач оптимизации области, достаточно хорошо изученных для эллиптических уравнений (см., например, [2–4]). Разрешимость задач в абстрактной формулировке с линейными B-симметричными B-положительно определенными операторами и с нелинейными непотенциальными операторами рассматривалась автором в [5, 6].

Область, соответствующую всякому решению рассматриваемой задачи оптимизации, будем называть оптимальной областью для задачи (3), (4), записанной в вариационной формулировке (5).

Теорема. *Для задачи (3), (4), записанной в вариационной формулировке (5), среди рассматриваемого множества допустимых областей существует по крайней мере одна оптимальная область.*

Литература

1. Филиппов В. М. *Вариационные принципы для непотенциальных операторов.* М.: Изд-во УДН, 1985.

2. Pironneau O. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems.* New York: Springer-Verlag, 1984.

3. Haslinger J., Makinen R. A. E. *Introduction to Shape Optimization. Theory, Approximation, and Computation.* Philadelphia: SIAM, 2003.

4. Neittaanmaki P., Sprekels J, and Tiba D. *Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications.* New York: Springer Science, 2006.

5. Замураев В. Г. *Разрешимость задач оптимизации с B-симметричными B-положительно определенными операторами* // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 42–43.

6. Замураев В. Г. *Разрешимость задач оптимизации с нелинейными непотенциальными операторами* // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2015. С. 18–19.