ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Т. Каримов

Рассмотрим следующее трехмерное эллиптическое уравнение с двумя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z=0, \tag{1}$$

в полубесконечном параллелепипеде $\Omega=\{(x,y,z): 0<x<1,\ \ 0<y<+\infty,\ \ 0<z<1\}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, причем $\beta,\gamma<1/2$; $u=u(x,y,z)$ – неизвестная функция.

В работе исследована однозначная разрешимость следующей нелокальной задачи.

Задача FD. Найти функцию $u(x,y,z)\in C(\bar\Omega)\bigcap C^1(\bar\Omega\bigcap(\{x=0\}\bigcup\{x=1\}))\bigcap\bigcap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям

$$u(0,y,z)=u(1,y,z),\quad u_x(0,y,z)=0,\quad 0\leqslant y<+\infty,\quad 0\leqslant z\leqslant 1,$$

$$u(x,y,0)=u(x,y,1)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y<+\infty,$$

$$\lim_{y\to\infty}u(x,y,z)=0,\quad u(x,0,z)=f(x,z),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant 1,$$

где $\bar\Omega=\{(x,y,z): 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<+\infty,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$, а $f(x,z)$ – заданная функция.

Теорема. Пусть функция $f(x,z)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f(0,z)=f(1,z),\quad f_x(0,z)=0,\quad f(x,0)=f(x,1)=0,\quad f_{xx}(1,z)=f_{xx}(0,z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[z^{2\gamma}f_{xxz}(x,z)]\in C([0,1]\times[0,1]),\quad \lim_{z\to1}\frac{\partial}{\partial z}[z^{2\gamma}f_z(x,z)]=0,\quad \lim_{z\to0}z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}[z^{2\gamma}f_z(x,z)]=0,$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|z^{\gamma-(1/2)}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}(z^{2\gamma}f_{xxxxz}(x,z))\right]\right|dx\,dx<+\infty.$$

Тогда решение задачи FD существует, единственно и определяется формулой

$$u(x,y,z)=2\sum_{m=1}^{\infty}v_{0m}(y)Z_m(z)+4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[\omega_{nm}(y)X_{2n-1}(x)+v_{nm}(y)X_{2n}(x)]Z_m(z),$$

где

$$X_{2n-1}(x)=x\sin(2\pi nx),\quad X_{2n}(x)=\cos(2\pi nx),\quad n\in\mathbb{N},$$

$$Z_{nm}(z)=\sqrt{2}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\delta_{nm}z)/|J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})|,\quad m\in\mathbb{N},\quad n=0,1,2\ldots,$$

$$\omega_{nm}(y)=\bar K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)f_{nm},\quad \bar K_\nu(z)=2^{1-\nu}z^\nu K_\nu(z)/\Gamma(\nu),$$

$$v_{nm}(y)=\bar K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)\tilde f_{nm}+\frac{\pi ny^{3/2-\beta}K_{-1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y)}{2^{-3/2-\beta}\Gamma(1/2-\beta)(\sqrt{\lambda_{nm}})^{1/2+\beta}}f_{nm},$$

$$f_{nm}=\int_0^1\int_0^1 f(x,z)\sin(2\pi nx)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)\,dx\,dx,\quad n,m\in\mathbb{N},$$

$$\tilde{f}_{nm} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,z)(1-x)\cos(2\pi n x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\,dx\,dx, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера[1], $K_\omega(z)$ – функция Макдональда [1].

Литература

1. Ватсон Г. Н. *Теория бесселевых функций.* Т. 1. М.: ИЛ, 1949.