СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

С.С. Каянович

Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в канале при больших числах Рейнольдса предлагается модель стержневого течения (плотность $\rho = 1$)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t) \in \widetilde{\Omega}_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{iT}, \quad i = 1,2, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega'_T, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t) \in \widetilde{\Omega}_T, \tag{3}$$

$$u_1|_{t=0} = \bar{b}(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}, \quad u_1|_{\widetilde{S}_T} = \widetilde{\psi_1}(s,t), \quad (s,t) \in \widetilde{S}_T, \quad u_2|_{S_{iT}} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}|_{S'_{1T}} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}|_{S'_{1T}}, \quad u_2|_{S'_{2T}} = -\int\limits_{H}^{H-\epsilon} \frac{\partial u_1(x_1,z,t)}{\partial x_1}\, dz, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}|_{\widetilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^{2} \omega_j(s,t) \cos\alpha_j, \quad \omega_i = \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \tag{6}$$

где $\zeta(x)$ – срезающая функция, где $\partial p/\partial \overline{n}|_{\widetilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к $\widetilde{S}_T$, α_i – угол между вект $\overline{n}$ и осью Ox_i, $\widetilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой $\widetilde{S}$, $\overline{\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\Omega} \bigcup \widetilde{S}$, $\widetilde{S} = \widetilde{S_1} \bigcup \widetilde{S_2} \bigcup \widetilde{S_3} \bigcup \widetilde{S_4}$, где

$$\widetilde{S_1} = [0 \leqslant x_1 \leqslant \tfrac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1)] \bigcup [\tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \tfrac{\delta}{2}, x_2 = 0] \bigcup [L - \tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = \phi_1(x_1)],$$

$$\widetilde{S_2} = [0 \leqslant x_1 \leqslant \tfrac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1)] \bigcup [\tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \tfrac{\delta}{2}, x_2 = H] \bigcup [L - \tfrac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = \phi_2(x_1)],$$

$$\widetilde{S_3} = [x_1 = 0, \theta_1(0) \leqslant x_2 \leqslant \theta_2(0)], \quad \widetilde{S_4} = [x_1 = L, \phi_1(L) \leqslant x_2 \leqslant \phi_2(L)],$$

$$S_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = 0], \quad S_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = H], \quad S_\cup = S_1 + S_2,$$

$$S_{\cup T} = S_\cup \times (0,T], \quad \Omega_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, 0 < x_2 \leqslant \varepsilon],$$

$$\Omega_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, H - \varepsilon \leqslant x_2 < H], \quad \Omega_{iT} = \Omega_i \times [0,T], \quad i = 1,2,$$

$$\Omega' = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \quad \widetilde{\Omega}'_T = \widetilde{\Omega}' \times [0,T], \quad \widetilde{\Omega}_T = \widetilde{\Omega} \times [0,T],$$

$$S'_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = \epsilon_1], \quad S'_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L, x_2 = H - \epsilon_1], \quad S'_{iT} = S'_i \times [0,T], \quad i = 1,2,$$

$$\widetilde{S}_T = \widetilde{S} \times [0,T], \quad \overline{\widetilde{\Omega}}_T = \overline{\widetilde{\Omega}} \times [0,T],$$

ε, δ – малые положительные числа, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$.

В работе [1] доказано существование решений этой модели на каждом временном слое $t_m = m\tau$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, M)$. В работе [2] найдены априорные оценки этих решений, которые не зависят от τ и позволяют выполнить предельный переход при $\tau \to 0$ (там же определена срезающая функция). Из результатов, полученных в [2], вытекает

Теорема. *Пусть $\bar{b}(x)$ есть функция, непрерывная в $\bar{\bar{\Omega}}$ (см. условия (4)), и выполнены условия гладкости, указанные в* [2]. *Тогда задача (1)–(6) имеет классическое решение, которое является единственным.*

Литература

1. Каянович С. С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

2. Каянович С. С. *Краевая задача для стержневого течения в канале* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 4. С. 55–66.