КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССЕ ГЛАДКИХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИЙ

В.И. Корзюк, И.С.Козловская, С.Н. Наумовец

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

На множестве $\overline{Q} = [0,\infty) \times [0,l]$ рассмотрим волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 - a^2\partial_{x_1}^2)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q}, \tag{1}$$

относительно искомой функции $u : \mathbb{R}^2 \supset \overline{Q} \in \mathbf{x} \to u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$. В (1) $a^2, l \in \mathbb{R}$ и $a^2, l^2 > 0$, $\partial_{x_j} = \partial^2/\partial x_j^2$, $j = 0, 1$. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0,x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,l], \tag{2}$$

и условия Дирихле

$$u(x_0,0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0,l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0,\infty). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия гладкости на заданные функции задачи (1)–(3):* $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$, $\mu^{(j)} \in C^2([0,\infty))$, $j = 1, 2$. *Существует классическое решение* u *из класса* $C^2(\overline{Q})$ *задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие однородные условия согласования:*

$$\varphi(0) - \mu^{(1)}(0) = 0, \quad d\mu^{(1)}(0) - \psi(0) = 0, \quad a^2d^2\varphi(0) - d^2\mu^{(1)}(0) + f(0,0) = 0,$$

$$\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = 0, \quad d\mu^{(2)}(0) - \psi(l) = 0, \quad d^2\mu^{(2)}(0) - a^2d^2\varphi(l) - f(0,l) = 0,$$

где d *– оператор дифференцирования обыкновенной производной.*

Доказательство теоремы приведено в [1].

Рассмотрим решение u задачи (1)–(3) не только в классе $C^2(\overline{Q})$, но и в классе $C^k, k > 2$, более гладких функций.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения (1)* f *принадлежит множеству* $C^{k-1}(\overline{Q})$. *Тогда функция* v_p, *определяема формулами*

$$v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}) = f^{(1,m)}(x_1 - ax_0) + f^{(2,m)}(x_1 + ax_0) -$$

$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_{l-ml}^{x_1 - ax_0} dy \int\limits_{ml}^{x_1 + ax_0} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{a}\right) dx, \quad x_1 \in [0,l],$$

$$v_p(\boldsymbol{x}) = v_p^{(m)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in Q^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

при соответствующем выборе $f^{(j,m)}$, $j = 1, 2$, $m \in \mathbb{N}$, *принадлежит классу* $C^k(\overline{Q})$, *является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям*

$$v_p(0,x_1) = \partial_{x_0}v_p(0,x_1) = 0, \quad \partial_{x_0}^2 v_p(0,x_1) = f(0,x_1), \quad x_1 \in [0,l],$$

$$\partial^s_{x_0} v_p(0,x_1) = \partial^{s-2}_{x_0} f(0,x_1) + a^2\partial^2_{x_1}\partial^{s-4}_{x_0} f(0,x_1) + \ldots + a^{s-3}\partial^{s-3}_{x_1}\partial_{x_0} f(0,x_1), \quad s = 3,5,7,\ldots,$$

$$\partial^s_{x_0} v_p(0,x_1) = \partial^{s-2}_{x_0} f(0,x_1) + a^2\partial^2_{x_1}\partial^{s-4}_{x_0} f(0,x_1) + \ldots + a^{s-2}\partial^{s-2}_{x_1} f(0,x_1),$$
$$s = 4,5,6,\ldots, \quad s \leqslant k.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия гладкости на заданные функции задачи (1)–(3):* $f \in C^{k-1}(\overline{Q})$, $\varphi \in C^k([0,l])$, $\psi \in C^{k-1}([0,l])$, $\mu^{(j)} \in C^2([0,\infty))$, $j = 1,2$. *Существует единственное классическое решение* u *из класса* $C^k(\overline{Q})$, $k \geqslant 2$ *задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие однородные условия согласования:*

$$\mu^{(1)}(0) - \varphi(0) = 0, \quad d\mu^{(1)}(0) - \psi(0) = 0,$$

$$d^s\mu^{(1)}(0) - a^s d^s\varphi(0) = \partial^{s-2}_{x_0} f(0,0) + a^2\partial^2_{x_1}\partial^{s-4}_{x_0} f(0,0) + \ldots + a^{s-2}\partial^{s-2}_{x_1} f(0,0),$$
$$s = 2,4,\ldots, \quad s \leqslant k,$$
$$d^s\mu^{(1)}(0) - a^{s-1}d^{s-1}\psi(0) = \partial^{s-2}_{x_0} f(0,0) + a^2\partial^2_{x_1}\partial^{s-4}_{x_0} f(0,0) + \ldots + a^{s-3}\partial^{s-3}_{x_1}\partial_{x_0} f(0,0),$$
$$s = 3,5,7,\ldots, \quad s \leqslant k,$$

$$\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = 0, \quad d\mu^{(2)}(0) - \psi(l) = 0,$$
$$d^s\mu^{(2)}(0) - a^s d^s\varphi(l) = \partial^{s-2}_{x_0} f(0,l) + a^2\partial^2_{x_1}\partial^{s-4}_{x_0} f(0,l) + \ldots + a^{s-2}\partial^{s-2}_{x_1} f(0,l),$$
$$s = 2,4,\ldots, \quad s \leqslant k,$$
$$d^s\mu^{(2)}(0) - a^{s-1}d^{s-1}\psi(l) = \partial^{s-2}_{x_0} f(0,l) - a^2\partial^2_{x_1}\partial^{s-4}_{x_0} f(0,l) - \ldots - a^{s-3}\partial^{s-3}_{x_1}\partial_{x_0} f(0,l),$$
$$s = 3,5,7,\ldots, \quad s \leqslant k.$$

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений.* Курс лекций в 10 частях. Ч. 2. Мн., 2017.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. *Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши* // Весцi Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–20.

3. Корзюк В. И., Наумовец С. Н. *Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях* // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 3. С. 11–17.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/