КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская, В.Ю. Соколович

В работе в аналитическом виде представлено классическое решение задачи со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на второй части в виде полупрямой – условие Неймана. В классе дважды непрерывно дифференцируемых функций в четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения выписывается частное решение исходного волнового уравнения без продолжения заданной функции неоднородного уравнения. Для заданных функций задачи выписываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим и единственным.

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,\infty)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$ рассматривается одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 - a^2\partial_{x_1}^2)u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2 – положительное число. На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty), \tag{2}$$

на другой полупрямой – граничные условия

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \tau]. \tag{3}$$

$$\partial u(x_0, 0) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in (\tau, \infty), \tag{4}$$

где $0 < \tau < +\infty$, f, φ, ψ, $\mu^{(j)}$, $j = 1, 2$, – заданные функции.

Задача. Определить в аналитическом виде классическое решение уравнения (1) из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющее условиям (2)–(4).

Общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{(0)}(\boldsymbol{x}) + v_p(\boldsymbol{x}),$$

где $u^{(0)}$ – общее решение из $C^2(\bar{Q})$ однородного уравнения (1), а $v_p \in C^2(\bar{Q})$ – частное решение уравнения (1).

Общее решение $u^{(0)}$ однородного уравнения (1) представляется в виде [1]

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0),$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из классов $C^2(D(g^{(j)}))$, $j = 1, 2$, $(D(g^{(j)}))$ – области определения функций $g^{(j)}$ для любых $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$

Для определения v_p область Q характеристикой $\{\boldsymbol{x} : x_1 = ax_0\}$ разбивается на две подобласти $Q^{(j)} = \{\boldsymbol{x} : (-1)^j(ax_0 - x_1) > 0\}$, $j = 1, 2$. В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим функции

$$v_p^{(j)}(\boldsymbol{x}) = f^{(1,j)}(x_1 - ax_0) + f^{(2)}(x_1 + ax_0) -$$

$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_1 - ax_0} dy \int\limits_{(-1)^j(ax_0 - x_1)}^{x_1 + ax_0} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dx, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(J)}}, \tag{5}$$

где $f^{(1,j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f^{(2)} \in C^2(D(f^{(2)}))$. Если $f \in C^1(\bar{Q})$, то из представлений(5) следует, что функции $v_p^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ и каждая из них удовлетворяет уравнению (1) на множестве $(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2$.

Тогда функция частного решения v_p на всем замыкании $\bar{Q}$ области Q определяется формулой

$$v_p(\boldsymbol{x}) = v_p^{(j)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2.$$

Теорема. *Пусть функции* $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\in C^1([0, \infty))$, $f \in C^1(\bar{Q})$, $\mu^{(1)} \in$ $\in C^2([0, \infty))$, $\mu^{(2)} \in C^1([0, \infty))$, $f^{(1,j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f^{(2)} \in C^2([0, \infty))$. *Существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) из класса* $C^2(\bar{Q})$, *представимое в аналитическом виде, тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$\varphi(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \psi(0) = d\mu^{(1)}(0), \quad d^2\mu^{(1)}(0) - a^2 d^2\varphi(0) - f(0, 0) = 0,$$

$$\mu^{(2)}(\tau) + \frac{1}{a}\, d\mu^{(1)}(\tau) - d\varphi(a\tau) - \frac{1}{a}\psi(a\tau) - \frac{1}{a}\partial_{x_0} v_p(\tau, 0) - \partial_{x_1} v_p(\tau, 0) = 0$$

$$d\mu^{(2)}(\tau) + \frac{1}{a} d^2\mu^{(1)}(\tau) - a d^2\varphi(a\tau) - d\psi(a\tau) - \frac{1}{a}\partial^2_{x_0} v_p(\tau, 0) - \partial_{x_0}\partial_{x_1} v_p(\tau, 0) = 0,$$

и условия

$$f^{(1,1)}(0) = f^{(1,2)}(0), \quad df^{(1,1)}(0) = df^{(1,2)}(0), \quad d^2 f^{(1,2)}(0) - d^2 f^{(1,1)}(0) = \frac{1}{a^2} f(0, 0).$$

Литература

1. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений.* Курс лекций в 10 частях. Ч. 1. Мн.: БГУ, 2017.

2. Корзюк В. И., Козловская И. С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений.* Курс лекций в 10 частях. Ч. 2. Мн.: БГУ, 2017.