РЕШЕНИЕ И КОРРЕКТНОСТЬ ПО АДАМАРУ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНОМ РЕЖИМЕ

Ф.Е. Ломовцев

Во множестве классических решений полностью решена и изучена корректность по Адамару (однозначная и устойчивая везде разрешимость) смешанной задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \dot{\widetilde{G}}_\infty = \{]\sigma(t),\infty[\times]\kappa(x),\infty[: t>0, x>0\}, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=\kappa(x)} = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,t)|_{t=\kappa(x)} = \psi(x), \quad x>0, \quad (2)$$

$$\Gamma(t)u|_{x=\sigma(t)} \equiv [\alpha(t)\partial_t u(x,t) + \beta(t)\partial_x u(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=\sigma(t)} = \mu(t), \quad t>0, \quad (3)$$

где α, β, γ – заданные функции переменной t; φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x, t и $a_1>0$, $a_2>0$. Заменой переменных x и t всегда можно сделать так, чтобы $\kappa(0)=\sigma(0)=0$. Если носители начальных $\kappa(x) < x/a_1$, $x>0$, и граничного $\sigma(t)<a_1 t$, $t>0$, данных, то криволинейная четверть плоскости $\widetilde{G}_\infty = \{[\sigma(t),\infty[\times[\kappa(x),\infty[\subset \mathbb{R}^2 : t>0,\ x>0\}$ переменных (x,t) разбивается характеристикой $x=a_1 t$ на два множества $\widetilde{G}_- = \{(x,t)\in\widetilde{G}_\infty : x > a_1 t > a_1\kappa(x),\ x>0\}$ и $\widetilde{G}_+ = \{(x,t)\in\widetilde{G}_\infty : \sigma(t)\leqslant x\leqslant a_1 t,\ t\geqslant 0\}$. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$.

Определение 1. Характеристика $x=a_1 t$, где $a_1>0$, называется *критической* для уравнения (1) в первой криволинейной четверти плоскости $\widetilde{G}_\infty$.

Определение 2. *Классическим решением* смешанной задачи (1)–(3) на $\dot{\widetilde{G}}_\infty$ называется функция $u\in C^2(\widetilde{G}_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а условиям (2) и режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от $u(\dot{x},\dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{\widetilde{G}}_\infty$ при $(\dot{x},\dot{t})\to(x,\kappa(x))$ и $(\dot{x},\dot{t})\to(\sigma(t),t)$ для граничных точек множества $\widetilde{G}_\infty$.

Воспользуемся следующими обозначениями и функциями:

$$y=\chi_1(x)=x-a_1\kappa(x), \quad z=\chi_2(x)=x+a_2\kappa(x), \quad w=\sigma_1(t)=a_1 t-\sigma(t).$$

Предполагается, что эти функции имеют достаточно гладкие обратные функции

$$\chi_1^{-1}(y)=x, \quad \chi_2^{-1}(z)=x, \quad \sigma_1^{-1}(w)=t, \quad \chi_1^{-1},\chi_2^{-1},\sigma_1^{-1}\in C^2[0,\infty[. \quad (4)$$

Из постановки задачи (1)–(3) вытекает справедливость равенств $\chi_1(0)=\chi_2(0)=\sigma_1(0)=0$.

Найдено классическое решение этой задачи (1)–(3) и установлен критерий корректности (необходимые и достаточные условия) на начальные φ,ψ и граничное μ данные без их продолжений вне $\widetilde{G}_\infty$ для ее однозначной и устойчивой везде разрешимости. Этот критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на начальные данные φ,ψ и граничное данное μ и двух условий согласования между ними. Доказана

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты* α, β, $\gamma\in C^1(\mathbb{R}_+)$; *не характеристическая первая косая производная* $a_1\alpha(t)\neq\beta(t)$, $t\geqslant 0$; *выполняются* *неравенства* $\kappa(x) < x/a_1,\ \ x > 0,\ \ \sigma(t) < a_1 t, t > 0;\ \ \kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0,\infty[$ *и существуют обратные функции (4). Для того, чтобы смешанная задача (1)–(3) на* $\dot{\widetilde{G}}_\infty$ *имела единственное и устойчивое по* $\varphi,\ \psi,\ \mu$ *классическое решение* $u \in C^2(\widetilde{G}_\infty)$ *необходимо и достаточно требований гладкости*

$$\varphi \in C^2[0,\infty[, \psi \in C^1[0,\infty[, \mu \in C^1[0,\infty[\tag{5}$$

и условий согласования

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)[(a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0)] + \\ + [\alpha(0)\sigma'(0) + \beta(0)]\psi'(0) + \beta(0)\varphi''(0) + \gamma(0)[\sigma'(0)\varphi'(0) + \psi(0)] = \mu'(0).\end{gathered} \tag{7}$$

Этим классическим решением смешанной задачи (1)–(3) на $\dot{\widetilde{G}}_\infty$ *является функция*

$$\begin{gathered}u_-(x,t) = \varphi(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)) - \\ - \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_{\chi_1^{-1}(x - a_1 t)}^{\chi_2^{-1}(x + a_2 t)} \{a_2 \varphi'(s) - [1 + a_2 \kappa'(s)]\psi(s)\}[1 - a_1 \kappa'(s)]\, ds, (x,t) \in \widetilde{G}_-,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}u_+(x,t) = \int\limits_0^{\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)} \exp\left\{ \int\limits_{\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)}^{s} \frac{\gamma(\rho)[a_1 - \sigma'(\rho)]}{a_1\alpha(\rho) - \beta(\rho)}\, d\rho \right\} \frac{\mu(s) - P(s)}{a_1\alpha(s) - \beta(s)}[a_1 - \sigma'(s)]\, ds + \\ + \varphi(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_0^{\chi_2^{-1}(x + a_2 t)} \{a_2\varphi'(s) - [1 + a_2\kappa'(s)]\psi(s)\}[1 - a_1\kappa'(s)]\, ds, \quad (x,t) \in \widetilde{G}_+.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь используется специальная функция $P(t)$, являющаяся значением граничного оператора и определяемая равенством $P(t) = [\Gamma(t) h(x + a_2 t)]|_{x=\sigma(t)}$, в котором

$$h(z) = \varphi(\chi_2^{-1}(z)) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_0^{\chi_2^{-1}(z)} \{a_2\varphi'(s) - [1 + a_2\kappa'(s)]\psi(s)\}[1 - a_1\kappa'(s)]\, ds.$$

Идея доказательства. Поставленная смешанная задача решается в явном виде и исследуется ее корректность по Адамару модификацией и обобщением метода характеристик для уравнения колебаний струны в линейной первой четверти плоскости из [1–3] на криволинейную первую четверть плоскости. Требования гладкости (5) обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость функций (8) и (9) соответственно в $\widetilde{G}_-$ и $\widetilde{G}_+$. Необходимость требований (5) непосредственно следует из постановки смешанной задачи (1)–(3) и определения 2 ее классических решений. Совместно с этими требованиями гладкости (5) условия согласования (6) и (7) необходимы и достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости этих функций (8) и (9) еще и на критической характеристике $x = a_1 t$. Устойчивость классического решения u по $\varphi,\ \psi,\ \mu$ можно вывести из формул (8), (9).

Замечания. Если носители исходных данных $\kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0, \infty[$, то для существования обратных функций (4), которые будут дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, достаточно выполнения соответственно следующих неравенств для производных: $\kappa'(x) < 1/a_1$ или $\kappa'(x) > 1/a_1$, $x \geqslant 0$; $\kappa'(x) < -1/a_2$ или $\kappa'(x) > > -1/a_2$, $x \geqslant 0$; $\sigma'(t) < a_1$ или $\sigma'(t) > a_1$, $t \geqslant 0$. В случае линейности первой четверти плоскости наша задача при $a_1 = a_2 = a > 0$ решена и получены только достаточные условия корректности в [2] для (и не) характеристической первой косой производной и она полностью решена и изучена ее корректность в [3] для характеристической первой косой производной в граничном режиме.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.

2. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.

3. Ломовцев Ф. Е. *Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 1. С. 21–27.