ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПЕРВЫМИ КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА КОНЦАХ

Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко

Без продолжений данных во множестве классических решений установлены достаточные условия для однозначной везде разрешимости линейной смешанной задачи с зависящими от времени первыми косыми производными, направленными вдоль характеристик уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad a > 0, \quad \dot{Q}_n =]0,d[\times]0,d_{n+1}[, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in]0,d[, \tag{2}$$

$$[\alpha_i(t)u_t(x,t) + \beta_i(t)u_x(x,t) + \gamma_i(t)u(x,t)]|_{x=\hat{d}_i} = \mu_i(t),$$
$$t \in]0,d_{n+1}[, \quad i = 1,2, \quad n = 1,3,\ldots, \tag{3}$$

где α_i, β_i, γ_i – функции переменной t, $a\alpha_i(t) = (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0,d_{n+1}]$, $\hat{d}_i = (i-1)d$ – концы струны и исходные данные f, φ, ψ, μ_1, μ_2 – функции своих переменных x и t.

Множество $Q_n = [0,d]\times[0,d_{n+1}]$ делится на прямоугольники $G_k = [0,d]\times[d_k,d_{k+1}]$, где $d_k = (k-1)d/(2a)$, $k = \overline{1,n}$, и разбивается характеристиками уравнения (1) на треугольники

$$\Delta_{3k-2} = \{\{x,t\} : x > at_k, \ \ x + at_k < d, \ \ x \in]0,\, d[\}, \quad t_k = t - d_k,$$

$$\Delta_{3k-1} = \{\{x,t\} : x \leqslant at_k, \ \ x \in [0,d/2]\},$$

$$\Delta_{3k} = \{\{x,t\} : x + at_k \geqslant d, \ \ x \in [d/2,\, d]\}, \quad t \in [d_k,d_{k+1}], \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема. *Пусть в граничном режиме коэффициенты* $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i \in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}]$, $k = \overline{1,\ n}$, $a\alpha_i(t) = (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0,d_{n+1}]$, $i = 1,2$, *выполняются условия гладкости*

$$\varphi \in C^{n+1}[0,d], \qquad \in C^n[0,d], \quad f \in C^{n-k}(G_k), \quad \mu_i \in C^{n-k+2}[d_k,d_{k+1}], \quad i = 1,2,$$

$$\int\limits_{d_k}^{t} f(|d - |d - x - (-1)^p a(t-\tau)||,\tau)\,d\tau \in C^{n-k+1}(G_k), \quad p = 0,1,$$

$$\beta_i(t)\varphi'''(\hat{d}_i - (-1)^i at_k), \quad \beta_i(t) \quad ''(\hat{d}_i - (-1)^i at_k),$$

$$\beta_i(t)\frac{d^2}{dt^2}\Bigg(\int\limits_{d_k}^{t} f(\hat{d}_i - (-1)^i a(t-\tau),\tau)\,d\tau\Bigg) \in C^{n-k}[d_k,d_{k+1}], \quad i = 1,2, \quad k = \overline{1,n},$$

и согласования граничных режимов (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1)

$$\sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{j!(l-j)!}\{\beta_i^{(l-j)}(0)[aK'_j(\hat{d}_i)+(-1)^{i+1}K_{j+1}(\hat{d}_i)]+a\gamma_i^{(l-j)}(0)K_j(\hat{d}_i)\}=a\mu_i^{(l)}(0),$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(n+1)!}{j!\,(n-j+1)!}\{\beta_i^{(n-j+1)}(0)[aK'_j(\hat{d}_i)+(-1)^{i+1}K_{j+1}(\hat{d}_i)]+a\gamma_i^{(n-j+1)}(0)K_j(\hat{d}_i)\}+$$

$$+\sqrt{a^2+1}\,\beta_i(0)\frac{\partial}{\partial\vec{\nu}_i}\left(\sum_{m=0}^{(n-1)/2}a^{2m}\frac{\partial^{n-1}f(\hat{d}_i,0)}{\partial x^{2m}\partial t^{n-1-2m}}\right)+$$

$$+a^{n+1}\beta_i(0)[a\varphi^{(n+2)}(\hat{d}_i)+(-1)^{i+1}\psi^{(n+1)}(\hat{d}_i)]+$$

$$+a\gamma_i(0)K_{n+1}(\hat{d}_i)=a{\mu_i}^{(n+1)}(0),\quad l=\overline{0,n},\quad i=1,2,\quad n=1,3,5,\ldots,$$

где $\partial(\sum)/\partial\vec{\nu}_i$ – значения производных по векторам $\vec{\nu}_i=\{a,(-1)^{i+1}\}$ от указанных сумм частных производных порядка $n-1$ функции f при $x=\hat{d}_i$ и $t=0$. Тогда в Q_n для задачи (1)–(3) существует единственное и устойчивое классическое решение $u\in C^2(Q_n)$:

$$u_{3k-2}(x,t)=\frac{\varphi_k(x+at_k)+\varphi_k(x-at_k)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at_k}^{x+at_k}\psi_k(\nu)\,d\nu+\frac{1}{2a}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau,$$

$$u_{3k-1}(x,t)=\frac{\varphi_k(x+at_k)-\varphi_k(at_k-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at_k-x}^{x+at_k}\psi_k(\nu)\,d\nu+\frac{1}{2a}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(|s|,\tau)\,ds\,d\tau+$$

$$+\left\{a\gamma_1\left(t-\frac{x}{a}\right)\right\}^{-1}\left\{a\mu_1\left(t-\frac{x}{a}\right)-\beta_1\left(t-\frac{x}{a}\right)[a{\varphi'}_k(at_k-x)+\psi_k(at_k-x)]-\right.$$

$$\left.-\beta_1\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_{d_k}^{t-x/a}f(a(t-\tau)-x,\tau)\,d\tau\right\}-\frac{1}{a}\int\limits_{d_k}^{t-x/a}\int\limits_{0}^{a(t-\tau)-x}f(s,\tau)\,ds\,d\tau,$$

$$u_{3k}(x,t)=\frac{\varphi_k(x-at_k)-\varphi_k(2d-x-at_k)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at_k}^{2d-x-at_k}\psi_k(\nu)\,d\nu+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{d_k}^{t}\int\limits_{d-x-a(t-\tau)}^{d-x+a(t-\tau)}f(d-|s|,\tau)\,ds\,d\tau+\left\{a\gamma_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{a\mu_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)-\beta_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)[a{\varphi'}_k(2d-x-at_k)-\psi_k(2d-x-at_k)]+\right.$$

$$\left.+\beta_2\left(t-\frac{d-x}{}\right)\int^{t-(d-x)/a}f(2d-x-a(t-\tau),\tau)\,d\tau\right\}-$$

где u_{3k-m} – *сужения* u *на* Δ_{3k-m}, $m = 0, 1, 2,$ *и рекуррентные начальные данные*

$$\varphi_k(x) = u_{3k-5+i}(x,t)\big|_{t=d_k}, \qquad {}_k(x) = (u_{3k-5+i})'_t(x,t)\big|_{t=d_k}, \quad x \in [(d/2)(i-1), (d/2)i],$$

$$i = 1, 2, \quad k = \overline{2, n}; \quad \varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \psi_1(x) = \psi(x), \quad x \in [0, d].$$

В условиях согласования используются функции $K_0(x) = \varphi(x)$, $K_1(x) = \psi(x)$ и

$$K_q(x) = \sum_{m=0}^{(q-2)/2} a^{2m} \frac{\partial^{q-2} f(x,t)}{\partial x^{2m} \partial t^{q-2-2m}}\bigg|_{t=0} + a^q \varphi^{(q)}(x), \quad q \text{ – \textit{четное}}, \ q \geqslant 2,$$

$$K_q(x) = \sum_{m=0}^{(q-3)/2} a^{2m} \frac{\partial^{q-2} f(x,t)}{\partial x^{2m} \partial t^{q-2-2m}}\bigg|_{t=0} + a^{q-1} \psi^{(q-1)}(x), \quad q \text{ – \textit{нечетное}}, \ q \geqslant 3.$$

Замечания. Эта теорема верна и при четных $n = 2, 4, \ldots,$ если гладкость

$$\varphi \in C^{n+2}[0, d], \qquad \in C^{n+1}[0, d], \quad f \in C^{n-k+1}(G_k), \quad k = \overline{1, n},$$

т.е. на единицу выше, чем указано в ее формулировке, и выполняются остальные достаточные требования гладкости и условия согласования при этих же $n = 2, 4, \ldots$ Данная теорема при $\alpha_i \equiv \beta_i \equiv 0$ дает классическое решение и достаточные условия корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) при начальных условиях (2) и граничных режимах

$$u(\hat{d}_i, t) = \mu_i(t)/\gamma_i(t), \quad t \in]0, d_{n+1}[, \quad i = 1, 2,$$

во множествах $\dot{Q}_n$, $n = 1, 3, \ldots$