О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Е.Ю. Панов

В полупространстве $\Pi = (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу Коши для нелинейного параболического уравнения

$$u_t + \mathrm{div}_x\varphi(u) = \Delta_x g(u) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u),\ldots,\varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ и неубывающая функция диффузии $g(u)\in C(\mathbb{R})$ предполагаются лишь непрерывными. Так как функция $g(u)$ может быть постоянной на нетривиальных интервалах, уравнение (1) является вырождающимся. В частности, при $g(u) = \mathrm{const}$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \mathrm{div}_x\varphi(u) = 0. \tag{3}$$

Понятие энтропийного решения задачи (3), (2) в смысле Кружкова [1] было распространено на случай уравнений (1) в работе Карильо [2].

Определение. Функция $u = u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением (коротко – э.р.) задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:

1) обобщенный градиент $\nabla_x g(u)\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi,\mathbb{R}^n)$;

2) для всех $k\in\mathbb{R}$

$$|u-k|_t + \mathrm{div}_x[\mathrm{sgn}(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))] - \Delta|g(u)-g(k)| \leqslant 0$$

в смысле распределений на Π;

3) $\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x)$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Известно, что э.р. задачи (1), (2) всегда существует, но в многомерном случае $n >$ > 1 может быть не единственным (см. [3]), что связано с недостаточной регулярностью вектора потока $\varphi(u)$ и функции диффузии $g(u)$.

Предположим теперь, что начальная функция является периодической (с некоторой решеткой периодов). Оказалось, что единственность э.р. задачи (1), (2) выполнена безусловно. Это вытекает из более общего принципа сравнения, который содержит

Теорема. *Предположим, что* $u_{01}(x), u_{02}(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_{01}(x)\leqslant u_{02}(x)$ *и пусть* $u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(t,x)$ *– э.р. задачи (1), (2) с начальными данными* $u_{01}(x)$, $u_{02}(x)$, *соответственно. Допустим, что по крайней мере одна из начальных функций – периодическая. Тогда* $u_1(t,x)\leqslant u_2(t,x)$ *(п.в. на* Π*).*

В гиперболическом случае (3) этот результат получен ранее в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.445.2016/1.4) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00258-а).

Литература

1. Кружков С. Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.

2. Carrillo J. *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems* // Arch. for Rat. Mech. and Anal. 1999. V. 147. P. 269–361.

3. Kruzhkov S. N., Panov E. Yu. *Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order* // Ann. Univ. Ferrara. 1994. V. 15. P. 31–53.

4. Панов Е. Ю. *К теории обобщенных энтропийных суб- и супер-решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 252–259.