КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

К.А. Спесивцева, Ф.Е. Ломовцев

Найдены решение и критерий однозначной и устойчивой везде разрешимости задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t), \quad \{x,t\} \in \dot{G}_\infty =]0,\infty[\times]0,\infty[, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \tag{2}$$

$$\Gamma(t)u = [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, b_1, b_2 – вещественные постоянные и f, φ, ψ, μ – заданные функции.

Первая четверть плоскости $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ делится критической характеристикой $x = a_1 t$ на множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t,\ t > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : x \leqslant a_1 t,\ x \geqslant 0\}$. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ и $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $\zeta,\xi,\theta,\alpha,\beta,\gamma \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $a_1\alpha(t) - \beta(t) \neq b_1[2a_1\zeta(t) - \xi(t)]$, $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. *Смешанная задача (1)–(3) на множестве* G_∞ *имеет единственное и устойчивое классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *для тех и только тех* φ, ψ, f, μ, *для которых*

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \qquad \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad f \in C(G_\infty), \quad \mu \in C^1(\mathbb{R}_+),$$

$$\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{4}$$

$$\frac{a_2}{a_1}\int\limits_0^{t_1(x)} f(a_2(t_1(x)-\tau),\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_1(x)}^t f(x - a_1(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{5}$$

$$t_1(x) = t - x/a_1 \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad G_\infty,$$

$$[(a_2-a_1)\zeta(t) + \xi(t)]\varphi'''(a_2 t), [(a_2-a_1)\zeta(t) + \xi(t)]\psi''(a_2 t) \in C(\mathbb{R}_+),$$

$$a_2\xi(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right] + \theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{a_1-a_2}{a_1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right] - f(0,t)\right\} \in C(\mathbb{R}_+),$$

$$\zeta(0)[f(0,0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (a_1-a_2)\psi'(0) - b_1b_2\varphi(0) - (b_1+b_2)\psi(0)] + \\ + [a_1\xi(0) - a_1^2\zeta(0)]\varphi''(0) + \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) + \xi(0)\psi'(0) = \mu(0),$$

$$\zeta(0)[-(b_1+b_2)f(0,0) + b_1b_2(b_1+b_2)\varphi(0) + (2(a_1-a_2)b_1b_2 + a_1b_2^2 - a_2b_1^2)\varphi'(0) +$$

$$+ [a_1(a_1-2a_2)b_2 - a_2(2a_1-a_2)b_1]\varphi''(0) + (b_1^2+b_1b_2+b_2^2)\psi(0) + [(2a_1-a_2)b_1 +$$
$$+ (a_1-2a_2)b_2]\psi'(0)] - \xi(0)[b_1b_2\varphi'(0) + (a_2b_1-a_1b_2)\varphi''(0) + (b_1+b_2)\psi'(0)] +$$
$$+ a_1a_2[(a_2-a_1)\zeta(0)+\xi(0)]\varphi'''(0) + a_2[(a_2-a_1)\zeta(0)+\xi(0)]\psi''(0) +$$
$$+ (\zeta'(0)+\alpha(0))[f(0,0) - b_1b_2\varphi(0) - (a_1b_2-a_2b_1)\varphi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1+b_2)\psi(0) +$$
$$+ (a_2-a_1)\psi'(0)] + \xi'(0)[\psi'(0)+a_1\varphi''(0)] - a_1^2\zeta'(0)\varphi''(0) + (\alpha'(0)+\gamma(0))\psi(0) +$$
$$+ \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \|\vec{\nu}\|\hat{f}'_{\vec{\nu}}(0,0) = \mu'(0),$$

где $f'_{\vec{\nu}}(0,0)$ *– производная по* $\vec{\nu} = \{(a_2-a_1)\zeta(0)+\xi(0), \zeta(0)\}$ *от* f *в* $(0,0)$ *и* $\|\vec{\nu}\|$ *– длина этого вектора. Классическим решением* $u \in C^2(G_\infty)$ *задачи (1)–(3) на* $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t) + a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t) +$$
$$+ e^{Bx-At}\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t} e^{-Bs}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds\Bigg] + F(x,t),\ (x,t)\in G_-, \tag{6}$$

$$u_+(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\Bigg[a_1e^{-B(x+a_2t)}\varphi(x+a_2t) + a_2\varphi(0) + \int\limits_0^{x+a_2t} e^{-Bs}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds\Bigg] +$$
$$+ a_1e^{Bx-At}\int\limits_0^{t_1(x)} \frac{\chi(a_1t_1(x),a_1\rho)\,[e^{A\rho}\mu(\rho)-M(\rho)]}{a_1\alpha(\rho)-\beta(\rho)-b_1[2a_1\zeta(\rho)-\xi(\rho)]}\,d\rho + F(x,t),\ (x,t)\in G_+.$$

В этой теореме использованы следующие функции:

$$F(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\Bigg[\int\limits_0^{t_1(x)}\int\limits_{a_2(t_1(x)-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau + \int\limits_{t_1(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\Bigg],$$

$$\chi(b,c) = \exp\left\{a_1\int\limits_{b/a_1}^{c/a_1}\frac{\gamma(\nu)-A\alpha(\nu)+B\beta(\nu)+b_1[(A+a_1B)\zeta(\nu)-B\xi(\nu)]}{a_1\alpha(\nu)-\beta(\nu)-b_1[2a_1\zeta(\nu)-\xi(\nu)]}\,d\nu\right\},$$

$$M(t) = \widetilde{\Gamma}(t)[K(x+a_2t)+e^{At-Bx}F(x,t)],$$

$$K(y) = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[a_1e^{-By}\varphi(y) + a_2\varphi(0) + \int\limits_0^y e^{-Bs}(A\varphi(s)+\psi(s))\,ds\Bigg],$$

$$\widetilde{\Gamma}(t)v(x,t) \equiv \{\zeta(t)v_{tt} + \xi(t)v_{xt} + (a_1\xi(t)-a_1^2\zeta(t))v_{xx} + [\alpha(t)-2A\zeta(t)+B\xi(t)]v_t +$$
$$+ [\beta(t)+(a_1B-b_1)\xi(t)-2Ba_1^2\zeta(t)]v_x +$$
$$+ [\gamma(t)-A\alpha(t)+B\beta(t)+b_1(A+a_1B)\zeta(t)-b_1B\xi(t)]v\}|_{x=0}.$$

Следствие. *Если правая часть* f *уравнения (1) зависит только от* x *или* t, *то утверждение этой теоремы верно без интегральных требования гладкости из (4) и (5) на* f.

Замечания. В интегральных требованиях гладкости (4) и (5) принадлежность интегралов множеству $C^1(G_\infty)$ для непрерывной функции $f \in G_\infty$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{0,1}(G_\infty)$ или $C^{1,0}(G_\infty)$, где соответственно $C^{0,1}(G_\infty)$ и $C^{1,0}(G_\infty)$ – множества непрерывных по x и t и непрерывно дифференцируемых по t и x функций на первой четверти плоскости G_∞. Формула (6) при $a_1 = a_2$ является известной формулой Даламбера (Эйлера) решения задачи Коши [1]. Классическое решение F неоднородного уравнения (1) с минимальными требованиями гладкости (4), (5) на правую часть f этого уравнения обосновано в [2]. Решение и критерий корректности задачи (1)–(3) при $b_1 = b_2 = 0$ получен в [3]. Наша теорема при $\zeta(t) \equiv \equiv \xi(t) \equiv \theta(t) \equiv 0$ дает классическое решение и критерий корректности смешанной задачи для уравнения (1) при не характеристической первой косой производной.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.

2. Ломовцев Ф. Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

3. Спесивцева К.А., Ломовцев Ф. Е. *Начально-граничная задача для общего одномерного волнового уравнения при нестационарном граничном условии с характеристическими вторыми частными производными* // Материалы Междунар. научн. конфер. «Еругинские чтения–2018». Ч. 2. Ин-т математики НАН Беларуси. Мн., 2018. С. 34–36.