ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA* ДЛЯ СОЗДАНИЯ И СОПРОВОЖДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

В.Б. Таранчук

В настоящее время обязательной компонентой систем поддержки принятия решений во многих сферах деятельности являются компьютерные модели процессов и явлений. Многие принимают их следующую иерархию: эмпирические (статистические), полуэмпирические, теоретические (математические). Например, такие классы моделей разработаны и продолжают развиваться при создании постоянно действующих геолого-технологических моделей процессов извлечения нефти [1, 2], лесных пожаров [3, 4].

В эмпирических моделях систематизируется ряд данных по основным характеристикам процесса, определяются коэффициенты корреляции для каждой независимой переменной. При таком подходе не изучается механизм явления, и полученные соотношения не распространяют за пределы применимости использованных статистических данных, а в рамках их делается прогноз с определенной вероятностью (типичный пример в [5]). В полуэмпирических моделях для уточнения основных параметров процесса привлекаются общие законы (физики, химии), которые записываются в виде упрощенных зависимостей, а соответствующие коэффициенты подбираются путем обобщения экспериментальной информации. Полуэмпирические модели адекватны в ситуациях, похожих на те, при которых были собраны опытные данные. Такие модели значительно проще в верификации по сравнению с теоретическими, при этом они более адекватны по сравнению с эмпирическими моделями (типичный пример в [6]).

Теоретические модели базируются на законах механики сплошной среды, других фундаментальных законах физики и химии, только они описывают развитие процессов в динамике с учетом общих и локальных факторов, неоднородностей и позволяют отвечать на весьма широкий круг вопросов (типичный пример в [7]). Математические описания теоретических моделей даются, как правило, в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Исходные математические описания, обычно, записаны в размерных переменных, каждый закон связывает величины, определяющие параметры процессов, число которых велико, соответственно, велико число уравнений. Создание любой компьютерной модели предполагает анализ, применение теории подобия и размерностей, сокращение числа уравнений, корректную формулировку начально-краевой задачи. Широко используемые (классические) постановки для многих процессов сделаны, первые работы были знаковыми событиями в предметных областях, авторы работ стали общепризнанными лидерами в своих направлениях.

Развитие систем компьютерной алгебры (СКА) открывает новые возможности, и не только при выполнении различных вычислений, математических символьных манипуляций там, где приходится иметь дело с условиями, сложными формулами, выражениями. Сейчас есть основание говорить, что искусственный интеллект, СКА обеспечивают исследователей инструментами автоматического получения новых постановок начально-краевых задач.

Для подтверждения сказанного рассматривается одна из математических моделей подземной гидродинамики, приведится пример получения средствами системы Wolfram Mathematica широко используемой постановки задачи двухфазной фильтрации [8].

Большинство компьютерных моделей процессов вторичной добычи нефти, в которых нефть (первая фаза) извлекается из порового коллектора путем закачки вытесняющей ее воды (вторая фаза), строится в приближении, когда используются уравнения, описывающие изотермическую двухфазную фильтрацию в недеформируемой пористой среде в предположениях, что учитываются эффекты капиллярных сил, жидкости (фазы) являются ньютоновскими, несмешивающимися и несжимаемыми.

Исходные уравнения теории подземной гидродинамики (см., например [9]) для такой модели процесса фильтрации включают дифференциальные уравнения неразрывности фаз, обобщенный закон фильтрации Дарси для каждой из жидкостей, функцию капиллярного давления. Два скалярных уравнения неразрывности для насыщенностей фаз s_i содержат производные по времени t от $(m \cdot s_i)$, m – пористость среды, считается заданной в каждой точке; $\operatorname{div}(\overline{u}_i)$, $\overline{u}_i$ – вектор скорости фильтрации i-й фазы; насыщенности в двухфазном потоке связаны третьим соотношением $s_1 + s_2 = 1$. Законы фильтрации записываются для каждой из фаз, определяют вектора скоростей фильтрации через $\operatorname{grad} p_i$, p_i – давление i-й фазы; включают k – абсолютная проницаемость среды, которая считается заданной в каждой точке, постоянные μ_i – вязкости фаз; f_i – относительные фазовые проницаемости, которые считаются задаваемыми функциями насыщенности вытесняющей фазы $s = s_2$. В случае пространственной геометрии из законов фильтрации Дарси имеем 6 уравнений. Также уравнения дополняются соотношением связи давлений в фазах p_1 - p_2 $= p_c$ – функцией капиллярного давления, она включает k, m и J-функцию Леверетта (задаваемую зависимость от s). Имеем в случае трехмерной геометрии модели 10 уравнений (8 нелинейных уравнений в частных производных, 2 соотношения); подлежат определению 10 величин (функции координат и времени): s_i, p_i, компоненты скоростей фильтрации $\overline{u}_i$, $i = 1, 2$.

Приведенная в [8] итоговая система, для которой формулируется начально-краевая задача, включает в себя два уравнения:

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} p_i) = (-1)^{i+1} \operatorname{div}((K - K_i) \operatorname{grad} p_c), \tag{1}$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + (\overline{u}, \operatorname{grad} F) + \operatorname{div}(F\, K_1 \operatorname{grad} p_c) = 0, \tag{2}$$

в которых использованы обозначения

$$K = K_1 + K_2, \quad K_i = k\frac{f_i}{\mu_i}, \quad F = \frac{\mu_1 f_2}{\mu_2 f_1 + \mu_1 f_2}.$$

В докладе будут продемонстрированы несколько вариантов получения приведенной системы (1), (2), причем, во всех вариантах выполнения в Wolfram Mathematica не предполагается вмешательства в процесс преобразований оператора.

Литература

1. Азиз Х., Сеттари Э. *Математическое моделирование пластовых систем.* М.: Недра, 1982.

2. Барвенов С. А., Кибаш М. Ф., Таранчук В. Б. *Методика, инструментарий адаптации математических моделей процессов подземной гидродинамики* // Выбраныя навуковыя працы Беларус. дзярж. ун-та. Т. «Математика». Мн., 2001. С. 34–65.

3. Pastor E. [et al]. *Mathematical models and calculation systems for the study of wildland fire behaviour* // Progress in Energy and Combustion Science. 2003. V. 29. P. 139–153.

4. Баровик Д. В., Таранчук В. Б. *Состояние проблемы и результаты компьютерного прогнозирования распространения лесных пожаров* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2011. № 3. С. 78–84.

5.Rothermel R. C. *A Mathematical model for Predicting Fire Spread in Wildland Fuels* // USDA Forest Service. Res. Pap. INT–115, 1972.

6. Баровик Д. В., Таранчук В. Б. *Адаптация модели Ротермела для реализации в программном комплексе прогноза распространения лесных пожаров* // Технологии техносферной безопасности : Интернет-журнал. 2011. Вып. 6 (40). 2011.

7. Баровик Д. В., Корзюк В. И., Таранчук В. Б. *К обоснованию математических моделей низовых лесных пожаров* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21. № 1. С. 3–14.

8. Данилов В. Л., Коновалов А. Н., Якуба С. И. *Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде* // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 307–310.

9. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.* М.: Недра, 1972.