КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

А.К. Уринов, А.Б. Окбоев

Рассмотрим уравнение

$$U_{xx}+yU_{yy}-n\,U_y-\lambda^2U=0,\quad y<0, \tag{1}$$

в конечной односвязной области D ограниченной характеристиками $AC: x-2\sqrt{-y}=0$, $BC: x+2\sqrt{-y}=1$ и $AB: y=0$ уравнения (1) при $y\leqslant 0$, где $n=0,1,2,\ldots,$ а $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda i\in\mathbb{R}$.

Задача Н. Найти регулярное в области D решение $U(x,y)\in C(\bar{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(x,0)=\tau(x),\quad x\in[0,1],$$

$$a(x)A_{0x}^{1,\lambda i}[D_{0x}^{1-\beta}U(\theta_0)]+b(x)A_{x1}^{1,\lambda i}[D_{x1}^{1-\beta}U(\theta_1)]=f(x),\quad x\in(0,1),$$

где $\tau(x),a(x),b(x),f(x)$ – заданные функции, причем

$$x^{-\beta}a(x)+(1-x)^{-\beta}b(x)\neq 0,$$

$$\tau(x)\in C^{(2n+4)}[0,1]\bigcap C^{(3n+4)}(0,1),\quad a(x),b(x),f(x)\in C[0,1],$$

$A_{kx}^{n,\lambda}$ – оператор определяемый формулой [1]

$$A_{kx}^{n,\lambda}[f(x)]\equiv f(x)-\int\limits_k^x f(x)\left(\frac{k-t}{k-x}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}]\,dt,$$

а $D_{0x}^{3/2+n}$ и $D_{x1}^{3/2+n}$ – операторы дробного дифференцирования [2],

$$A_n^-(\tau,\lambda)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(4y)^kC_{n+1}^k}{(-n)_k(1/2)_k}\int\limits_0^1\Psi_k(\tau,\lambda)[z(1-z)]^{k-1/2}\bar{J}_{k-1/2}(\sigma)\,dx+$$

$$+\frac{2(4y)^{n+1}}{\pi(-n)_n(1/2)_{n+1}}\int\limits_0^1\Psi_{n+1}(\tau,\lambda)[z(1-z)]^{n+1/2}\Big\{\ln[\sqrt{-y}z(1-z)]\bar{J}_{n+1/2}(\sigma)-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\sigma/2)^{2m}}{m!(n+3/2)_m}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n+j+1/2}\Big\}\,dx,$$

$J_\gamma(\sigma)$ – функция Бесселя первого рода, $\bar{J}_\gamma(\sigma) = \Gamma(\gamma+1)(\sigma/2)^{-\gamma}J_\gamma(\sigma)$, $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера, $(a)_k$ – символ Похгаммера, $\Psi_k(\tau,\lambda) = (\lambda^2 - d^2/dt^2)^k\tau(t)$, $t = x - 2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\sigma = 4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, а точки

$$\theta_0 = (x/2, -x^2/16) \quad \text{и} \quad \theta_1 = ((1+x)/2, -(1-x)^2/16)$$

являются точками пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $E(x,0)$ с характеристиками AC и BC соответственно.

Теорема. *Если* $x^{n+1/2}a(x)+(1-x)^{n+1/2}b(x) \neq 0$, *то решение поставленной задачи существует и единственно.*

Литература

1. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. *О свойствах некоторых операторов вольтерровского типа* // Докл. АН УзССCР. 1988. № 4. С. 3–5.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: «Наука и техника», 1987.