СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев

Модификацией метода характеристик полностью решена и доказана однозначная и устойчивая везде разрешимость во множестве классических решений смешанной задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \dot{G}_\infty = (0,\infty)\times(0,\infty), \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \tag{2}$$

$$[\alpha(t)\partial_t u(x,t) + \beta(t)\partial_x u(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

где коэффициенты α, β, γ – заданные функции переменной t, исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x, t и постоянные $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1, b_2 \in (-\infty,\infty)$.

Множество $G_\infty = [0,\infty)\times[0,\infty)$ разбивается характеристикой $x = a_1 t$ на два множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \leqslant x \leqslant a_1 t\}$. Доказана

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и характеристическая первая косая производная $a_1\alpha(t) = \beta(t)$, $\gamma(t) \neq b_1\alpha(t)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Для того, чтобы смешанная задача (1)–(3) на $\dot{G}_\infty$ имела единственное и устойчивое по φ, ψ, f, μ классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ необходимо и достаточно требований гладкости*

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \qquad \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad f \in C(G_\infty), \quad \mu \in C^2(\mathbb{R}_+),$$

$$\int\limits_0^t f(x + a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{4}$$

$$\frac{a_2}{a_1}\int\limits_0^{t_0(x)} f(a_2(t_0(x)-\tau),\tau)\,d\tau - \int\limits_{t_0(x)}^t f(x - a_1(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{5}$$

$$\beta(t)\varphi'''(a_2 t), \beta(t)\psi''(a_2 t), \beta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigg(\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\Bigg) \in C(\mathbb{R}_+)$$

и трех условий согласования

$$\alpha(0)[a_1\varphi'(0) + \psi(0)] + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0),$$

$$\alpha(0)[f(0,0) - (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) + a_2\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_1+b_2)\psi(0) - b_1b_2\varphi(0)] +$$
$$+ \alpha'(0)[a_1\varphi'(0) + \psi(0)] + \gamma'(0)\varphi(0) + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0),$$

$$\alpha(0)[\sqrt{a_2^2+1}f'_{\vec{\nu}_2}(0,0)-(b_1+b_2)f(0,0)+a_2((a_2-a_1)b_1-2a_1b_2)\varphi''(0)+$$

$$+(a_1b_2^2+(a_1-2a_2)b_2b_1-a_2b_1^2)\varphi'(0)+(a_1b_1-a_2b_1-2a_2b_2)\psi'(0)+$$

$$+a_1a_2^2\varphi'''(0)+a_2^2\quad''(0)+(b_2b_1^2+b_2^2b_1)\varphi(0)+(b_1^2+b_2b_1+b_2^2)\psi(0)]+$$

$$+2\alpha'(0)[f(0,0)+(a_2b_1-a_1b_2)\varphi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)+a_2\psi'(0)-b_1b_2\varphi(0)-(b_1+b_2)\psi(0)]+$$

$$+\gamma(0)[f(0,0)+(a_2b_1-a_1b_2)\varphi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)+(a_2-a_1)\psi'(0)-b_1b_2\varphi(0)-$$

$$-(b_1+b_2)\psi(0)]+\alpha''(0)(a_1\varphi'(0)+\psi(0))+\varphi(0)\gamma''(0)+2\psi(0)\gamma'(0)=\mu''(0),$$

где $f'_{\vec{\nu}_2}(0,0)$ – *значение производной по направлению* $\vec{\nu}_2=\{a_2,1\}$ *от* f *при* $x=0$ *и* $t=0$.

Этим классическим решением на $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Big\{a_1e^{-b_2t}\varphi(x+a_2t)+a_2e^{-b_1t}\varphi(x-a_1t)+$$

$$+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}e^{B(x-s)-At}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds\Big\}+F(x,t),\quad (x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\bigg\{a_1e^{-b_2(t-\frac{x}{a_1})}\bigg[e^{-b_2x/a_1}\varphi(x+a_2t)-e^{-b_1x/a_1}\varphi\Big(a_2\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\Big)\bigg]+$$

$$+\int\limits_{a_2(t-x/a_1)}^{x+a_2t}e^{B(x-s)-At}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds\bigg\}+a_1^{-1}\Big(\gamma\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)-b_1\alpha\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\Big)^{-1}\times$$

$$\times e^{-b_1x/a_1}\bigg\{a_1\mu\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)-e^{-b_2(t-\frac{x}{a_1})}\beta\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\bigg[a_1\varphi'\Big(a_2\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\Big)+b_1\varphi\Big(a_2\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\Big)+$$

$$+\quad\Big(a_2\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big)\Big)+\int\limits_0^{t_0(x)}e^{b_2\tau}f\Big(a_2(t_0(x)-\tau),\tau\Big)\,d\tau\bigg]\bigg\}+F(x,t),\quad (x,t)\in G_+.$$

В этой теореме использовались обозначение $t_0(x)=t-x/a_1$ в G_+, $t_0(x)=0$ в G_- и специальное классическое решение неоднородного уравнения (1) в G_∞ из [1]

$$F(x,t)=\frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\bigg[\int\limits_0^{t_0(x)}\int\limits_{a_2(t_0(x)-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+\int\limits_{t_0(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}e^{A\tau-Bs}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\bigg].$$

Следствие [1]. *Если правая часть* f *уравнения (1) зависит только от* x *или* t*, то утверждение теоремы верно без интегральных требований гладкости (4), (5) на* f.

Замечания. Для смешанной задачи (1)–(3) указанная в требованиях (4), (5) принадлежность интегралов от непрерывной функции f переменных x и t множеству $C^1(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(1,0)}(G_\infty)$ или $C^{(0,1)}(G_\infty)$. Здесь $C^{(1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,1)}(G_\infty)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на G_∞. Наша теорема при $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, $\gamma(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, дает единственное и устойчивое классическое решение и критерий корректности первой смешанной задачи для уравнения (1). В случае $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2 = 0$, $f = 0$ и характеристических первых косых производных эта задача исследовалась в [2], а в случае $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2 = 0$, $f \neq 0$ и не характеристических первых косых производных она полностью изучена в [3].

Литература

1. Ломовцев Ф. Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

2. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.

3. Новиков Е. Н. *Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 2017.