ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМСЯ ОПЕРАТОРОМ ПРИ КРАТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Е.С. Чеб, Е.С. Симинская

В работе рассматривается корректно поставленная граничная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, в случае наличия у него одной кратной характеристики и указан метод построения единственного классического решения при выполнении условий согласования начальных и граничных условий.

В полуполосе $Q = [0,\infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0,\infty) \times \overline{\Omega} \ni (t,x) \to u(t,x)$, где $\overline{\Omega}$ – замыкание области $\Omega = (0,l)$, рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка с разделяющемся оператором вида

$$\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} + b_i\right)u(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты a, b_1 и b_2 постоянны, $a > 0$, $b_1, b_2 \geqslant 0$. При таких предположениях уравнение (1) имеет одну характеристику $x + at$ кратности четыре. В этом случае граничные условия для (1) задаются не на всей границе.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t > \frac{l}{a}, \quad s = 0,1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t > 0, \quad s = 0,1. \tag{4}$$

Обратим внимание, что условие (4) задается не на всей границе $x = 0$, а только на части. Выбор таких граничных условий гарантирует корректность задачи (1)–(4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

Решение задачи (1) ищем в виде

$$u(t,x) = e^{-b_1 t} g_1(x+at) + t e^{-b_2 t} g_2(x+at) + t^2 e^{-b_3 t} g_3(x+at) + t^3 e^{-b_4 t} g_4(x+at), \tag{5}$$

где g_1, g_2, g_3 и g_4 – любые функции из $C^4(\mathbb{R})$ аргумента $x + at$, функции $g_i : [0,\infty) \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$. Требуется определить общий вид функций g_i $(i = 1,2,3,4)$ в представлении (5) при условии, что будут выполняться начальные (2) и граничные условия (3), (4).

Предварительно из условий (2) определяется вид этих функций на отрезке $[0, l]$. Затем, используя условия (3) и (4), получаем систему дифференциальных уравнений для определения функции g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ на оставшейся области определения. В точке $x = l$ требуется выполнение условий непрерывности самих функций и их производных до четвертого порядка включительно. В результате выводятся условия согласования начальных и граничных условий [2].

Литература

1. Корзюк В. И., Чеб Е. С, Ле Тхи Тху. *Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 36–54.

2. Чеб Е. С. *Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестн. Гомельск. гос. ун-та. Сер. 2. 2017. Т. 7. № 3. С. 33–41.