УДК 621.87

К. В. Овсянников, канд. техн. наук, Д. С. Червяков,
Г. С. Леневский, канд. техн. наук, доц.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В данной статье рассматриваются некоторые аспекты исследования устойчивости электромеханических систем с распределенными параметрами различными методами.

Электромеханической системой (ЭМС) с распределенными параметрами (РП) можно считать любую систему, имеющую в своей структуре протяженный упругий элемент, который нельзя адекватно представить в виде нескольких сосредоточенных масс, соединенных невесомыми упругими связями. В качестве системы с РП можно рассматривать грузоподъемную установку. Механическая часть грузоподъемной установки в общем случае, представляет собой многомассовую разветвленную систему. В нее входят следующие существенно сосредоточенные массы: поднимающихся и опускающихся концевых грузов, а также распределенные массы поднимающихся и опускающихся ветвей канатов. Механическая часть двухконцевого подъема является не только многомассовой, но и разветвленной системой, в которой одна ветвь каната сматывается, а другая наматывается. Статический момент может иметь положительный или отрицательный знак.

Механическая часть электромеханической системы подъема обычно представляется в виде расчетной схемы, состоящей из масс, соединенных связями с различной жесткостью. Систему подъема с упругими связями можно разделить на звенья, значительно влияющие на динамические процессы и мало влияющие на них. Такое разделение можно выполнить по величинам масс звеньев и жесткости связей между ними. В зависимости от решаемых при этом задач, сложную расчетную схему можно упростить, пользуясь различными методами.

В многомассовой системе подъема с безредукторным приводом на процессы не оказывают существенного влияния вал двигателя, соединительные муфты и опускающаяся ветвь каната, так как имеют большую жесткость. Массы этих звеньев можно соединить с массами машины и уменьшить порядок степени свободы системы. Основной податливый элемент системы — грузовая ветвь каната — жесткость которого намного меньше жесткости других звеньев. Поэтому различаются частоты колебаний звеньев электромеханической системы и поведение ЭМС можно оценить по расчетным схемам, рассматривая канат только как упругий элемент. Сложные условия для процессов возникают при длинной груженой ветви каната и наименьшем значении его жесткости. С развитием теорий управления и электропривода такие электромеханические системы представляли как [1]:

1) одномассовые системы;
2) двухмассовые системы с жесткой связью;
3) многомассовые системы.

Однако все эти модели не могли адекватно описать волновые процессы, возникающие в упругом элементе, например, продольные колебания. Только относительно недавно такие ЭМС стали рассматривать, именно как системы с РП.

Цель данной статьи – рассмотреть вопросы, возникающие при исследовании устойчивости электромеханических систем с РП и построении адекватных моделей, позволяющих с достаточной надежностью оценить устойчивость ЭМС, содержащей в своем составе элементы с РП.

Очень большое количество промышленных установок содержат звенья с распределенными параметрами. Это грузоподъемные установки, бурильные установки, армирующие манипуляторы, а также ряд других, у которых имеется протяженное кинематическое звено. Такие объекты описываются гиперболическими дифференциальными уравнениями в частных производных.

Наличие упругости в объекте управления оказывает существенное влияние на работу системы управления и заставляет отходить от стандартных настроек жестких систем и применять дополнительные корректирующие связи.

В общем случае математическое описание сложного объекта с распределенными параметрами не позволяет достаточно наглядно проанализировать влияние упругих свойств объекта на его динамику, поэтому и производится аппроксимация объекта моделью с сосредоточенными параметрами. Однако в ряде случаев из-за влияния подсистемы с сосредоточенными параметрами на объект с распределенными параметрами первый резонансный пик частотной характеристики всей системы смещается влево значительно сильнее, чем следующие резонансные пики, и именно он будет оказывать доминирующее влияние на динамику системы управления.

При наличии в сложных разветвленных объектах с распределенными параметрами элементов различной жесткости почти всегда можно выделить области с наибольшей и наименьшей податливостью. В этом случае частоты второго и следующих резонансных пиков частотной характеристики оказываются расположенными значительно правее частоты первого резонансного пика и находятся в области высоких частот.

Мероморфность передаточных функций гиперболических систем при малом демпфировании определяет важность решения вопросов устойчивости в замкнутых системах. Основная трудность при технической реализации модального управления в системах с распределенными параметрами состоит в сложности обеспечения устойчивости замкнутых систем, так как, с одной стороны, невозможно управлять всем конечным числом мод в силу ограниченности вычислительной мощности наблюдателей и регуляторов, а с другой стороны, «неучтенные», но реально присутствующие моды делают систему неустойчивой.

Вопрос оценки минимального количества мод, подлежащих управлению, при постановке задачи в терминах пространства состояний нетривиален, и в целом, задача получения приемлемой оценки состояния распределенной системы необычайно трудна.

Основная трудность заключается в наличии у передаточной функции объекта ярко выраженных резонансных (антирезонансных) свойств, практически исключающих возможность расширения полосы пропускания разомкнутой системы за частоту первого резонанса данной системы при нерезонансном регуляторе.

Значительно более эффективно задача формирования требуемых динамических свойств разомкнутой системы может быть решена за счет использования дополнительных обратных связей. Обратная связь, подключенная особым способом, позволяет перераспределить нули и полюса передаточной функции, тем самым сдвинув первые резонансы вправо, не прибегая к резонансным регуляторам.

В качестве системы с РП будем рассматривать линейный объект с распределенными параметрами [2], который можно представить в виде некоторого стержня, сочлененного с двух концов массами. В общем случае любую систему с РП можно привести к этому виду. В этом случае расчетная схема механической части будет представлена в виде двух приведенных сосредоточенных масс: массы m_1 и массы m_2, соединенных между собой упругим механическим элементом с распределенными параметрами.

Динамические процессы согласно расчетной схеме (рис. 1) описываются следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta F(x,t)}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial \Delta \nu(x,t)}{\partial t} = 0;\\
&\frac{\partial \Delta \nu(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{E \cdot s} \cdot \frac{\Delta F(x,t)}{\partial t} = 0;\\
&M_1 \cdot \frac{d\Delta \nu_В}{d\,t} = \Delta F_Д(t) - \Delta F_В(t);\\
&M_2 \cdot \frac{d\Delta \nu_Н}{d\,t} = \Delta F_Н(t),
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\Delta F(x,t)$ – приращение усилия в сечении x упругого элемента; ρ – масса единицы длины упругого элемента; $\nu(x,t)$ – скорость смещения сечения x упругого элемента; E и S – модуль упругости и площадь поперечного сечения упругого элемента; $\nu_В$ и $\nu_Н$ – скорости смещения верхнего и нижнего концов упругого элемента; $\Delta F_Д$ – приращение движущего усилия; $F_В$ и $F_Н$ – усилия в верхнем и нижнем сечениях упругого элемента.

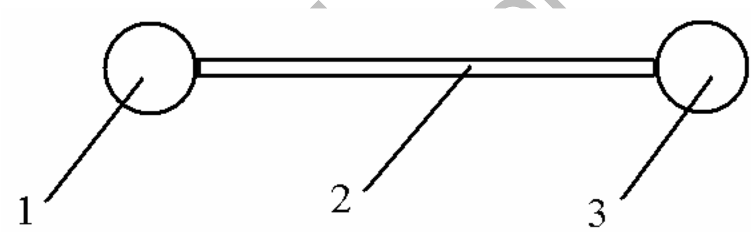

Рис. 1. Расчетная схема механической части: 1 – масса М1; 2 – упругий элемент; 3 – масса М2

В уравнения в частных производных [3] введя базовые величины $a = \sqrt{\dfrac{E \cdot s}{\rho}}$ – скорость распространения волны упругой деформации по упругому элементу, $T_{Р.П} = l/a$ – время прохождения волны, l – длину упругого элемента, $M_\Sigma = M_1 + M_2 + \rho l$ – суммарную приведенную массу, $F_\Sigma = M_\Sigma a / T_{Р.П}$ и приняв следующие обозначения $\varphi = F/F_\Sigma$, $\mu i = Mi/M_\Sigma$, $\nu = \upsilon/a$, $\tau = t/T_{Р.П}$, $\xi = x/l$, $Mk = \rho l/M_\Sigma$, уравнения (1) в относительных единицах запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta\varphi(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \mu_k \cdot \frac{\partial \Delta\upsilon(\xi,\tau)}{\partial \tau} = 0\\
&\frac{\partial \Delta\upsilon(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{\partial \Delta\varphi(\xi,\tau)}{\partial \tau} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 \cdot \frac{\partial \Delta \upsilon(\xi,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\xi=0} &= \Delta\varphi_д(\tau) - \Delta\varphi(0,\tau) \\ \mu_2 \cdot \frac{\partial \Delta \upsilon(\xi,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\xi=1} &= \Delta\varphi(1,\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Последовательно применив к уравнениям (3) преобразование Лапласа по относительному времени τ и переменной ξ, а затем переходя из области изображений по переменной λ – оператор Лапласа по длине, к оригиналу по переменной ξ, получим:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\upsilon(\xi,p) &= A\cdot ch(p\cdot\xi) - \mu_k{}^{-1}\cdot B\cdot sh(p\cdot\xi) \\ \Delta\varphi(\xi,p) &= B\cdot ch(p\cdot\xi) - \mu_k\cdot A\cdot sh(p\cdot\xi) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Из граничных условий:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\upsilon(\xi,p)\Big|_{\xi=0} &= \Delta\upsilon(0,p) \\ \Delta\upsilon(\xi,p)\Big|_{\xi=1} &= \frac{\Delta\varphi(1,p)}{\mu_2\cdot p} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

определяем постоянные A и B:

$$A = \Delta\upsilon(0,p). \qquad (6)$$

$$B = \mu_k \cdot \frac{p\cdot\mu_2\cdot ch(p) + \mu_k\cdot sh(p)}{p\cdot\mu_2\cdot sh(p) + \mu_k\cdot ch(p)}\cdot\Delta\upsilon(0,p). \qquad (7)$$

Подставив вычисленные значения постоянных в выражение для $\Delta\upsilon(\xi,p)$ и $\Delta\varphi(\xi,p)$, получим уравнения для изображений скорости и усилия в любом сечении по длине механического элемента в функции изображения скорости перемещения верхнего сечения механического элемента.

С учетом граничных условий (5) получаем передаточные функции от изображения движущего усилия $\Delta\varphi(p)$ к скорости $\Delta\upsilon(\xi,p)$ и усилию $\Delta\varphi(\xi,p)$ в любом сечении упругого элемента.

Тогда передаточная функция от движущего усилия к скорости перемещения для любого сечения механического элемента выглядит так:

$$W(p) = \frac{\Delta\upsilon(\xi,p)}{\Delta\varphi_д(p)} = \frac{ch(p\cdot\xi) - K(p)\cdot sh(p\cdot\xi)}{\mu_1\cdot p + K(p)\cdot\mu_k}, \qquad (8)$$

где

$$K(p) = \frac{p\cdot\mu_2\cdot ch(p) + \mu_k\cdot sh(p)}{p\cdot\mu_2\cdot sh(p) + \mu_k\cdot ch(p)}. \qquad (9)$$

Как видно из математической модели системы с распределенными параметрами, передаточная функция от движущего усилия к скорости перемещения не представляется полиномом, а является трансцендентным выражением, в котором оператор Лапласа p стоит под знаком тригонометрических функций. В этом случае как числитель, так и знаменатель выражения представить в виде произведения простых n сомножителей невозможно, ибо корней не конечное множество, а бесконечное.

При анализе данного выражения возникает необходимость получения конечномерной (аппроксимированной) математической модели. Анализ бесконечномерных моделей сильно затруднен, в связи с их трансцендентностью и присутствием в модели двух независимых переменных (как правило, x – пространственная координата, t – время).

Получение конечномерной математической модели называется аппроксимацией. Существует много способов аппроксимации передаточных функций, наиболее часто применяются следующие:

– разложение в цепные дроби;

– разложение на простейшие дроби;

– разложение по бесконечным произведениям;

– разложение по собственным функциям;

– разложение с помощью рядов Тейлора.

Хорошо зарекомендовал себя метод разложения на простейшие дроби.

При аппроксимации моделей используют следующую методику:

1) определяются парциальные параметры установки (массы, жесткость упругого элемента, масса упругого элемента);

2) определяются относительные массы элементов установки и упругого элемента;

3) определяется полоса пропускания системы;

4) строится логарифмическая амплитудно-частотная характеристика бесконечномерной (исходной) модели;

5) определяются полюса функции (в заданной частотном диапазоне);

6) определяются значения вычетов в полюсах;

7) находится конечномерная передаточная функция.

После аппроксимации такой передаточной функции для исследования ее устойчивости можно применять алгебраические методы, однако до сих пор не доказано и не выведены критерии эквивалентности исходной и аппроксимированной моделей объекта. Поэтому желательно найти методы, позволяющие исследовать трансцендентные передаточные функции не прибегая к их аппроксимации.

Следовательно алгебраические критерии исследования устойчивости систем с распределенными параметрами, в частности критерий Гурвица, применять нельзя. Рассмотрим частотные методы.

К частотным методам относят два метода:

1) метод исследования устойчивости на основе критерия Михайлова;

2) метод исследования устойчивости на основе критерия Найквиста.

Но критерий Михайлова опять же опирается на частотный полином [4], полученный из знаменателя функции, но его невозможно выделить без аппроксимации модели. Остается только метод исследования устойчивости на основе критерия Найквиста.

Воспользуемся для построения АФХ пакетом Matlab 5.0 [5]. В этом случае имеется возможность построить амплитудно-фазовую характеристику для какой-нибудь одной точки выхода [6]. Для $\xi = 0$ получается следующая характеристика (рис. 2).

Как видно из рис. 2, система является в этом случае устойчивой. Однако устойчива она только для точки выхода $\xi = 0$. Но ξ меняется от 0 до 1, принимая любые действительные значения, следовательно необходимо провести исследование устойчивости одной и той же системы, но для бесконечного числа точек выхода. Принципиально это можно представить следующим образом: будет рассмотрена амплитудно-фазовая характеристика не в плоскости, а в пространстве, где третьей координатой будет являться линейная протяженность объекта.

Так как объект исследования в каждой точке может быть описан передаточной функцией, отличной от других точек, то построение такой поверхности ненаглядно. Однако амплитудно-фазовые характеристики в каждой точке не имеют разрывов, поэтому поверхность из таких характеристик-срезов можно считать непрерывной.

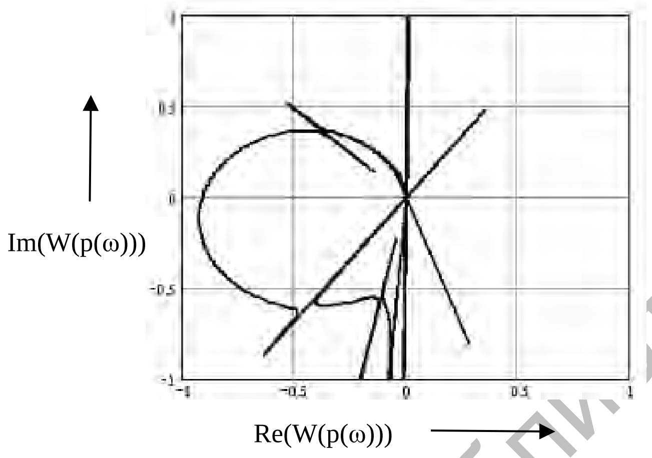

Рис. 2. Амплитудно-фазовая характеристика

В таком случае можно рассматривать срезы «поверхности Найквиста» в некоторых контрольных точках и по ним судить об устойчивости объекта. Так как все точки объекта рассмотреть невозможно в силу их бесконечности, то в данной статье приводятся амплитудно-фазовые характеристики крайних точек объекта и 4 промежуточных точки. Для $\xi = 0$, то есть для начальной точки характеристика приведена на рисунке (см. рис. 2).

Как видно из рис. 2-7, точка комплексной плоскости (-1; 0) не охвачена графиком амплитудно-фазовой характеристики. Исходя из этого, можно судить о том, что данная система в целом – устойчива.

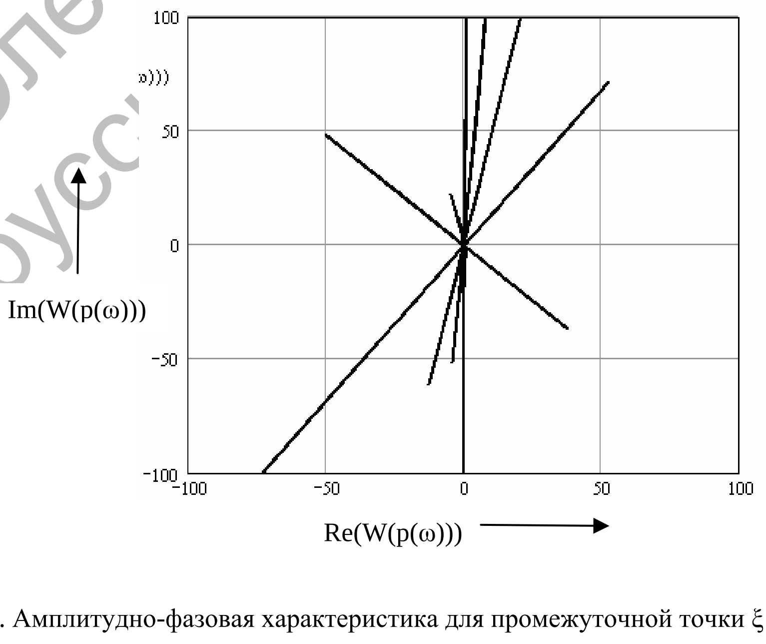

Рис. 3. Амплитудно-фазовая характеристика для промежуточной точки $\xi = 0,2$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что для исследования устойчивости систем с распределенными параметрами необходимо использовать критерий Найквиста, либо исследовать аппроксимированную передаточную функцию на устойчивость любым из классических методов [7]. Однако до сих пор не доказано и не выведены критерии эквивалентности исходной и аппроксимированной моделей объекта.

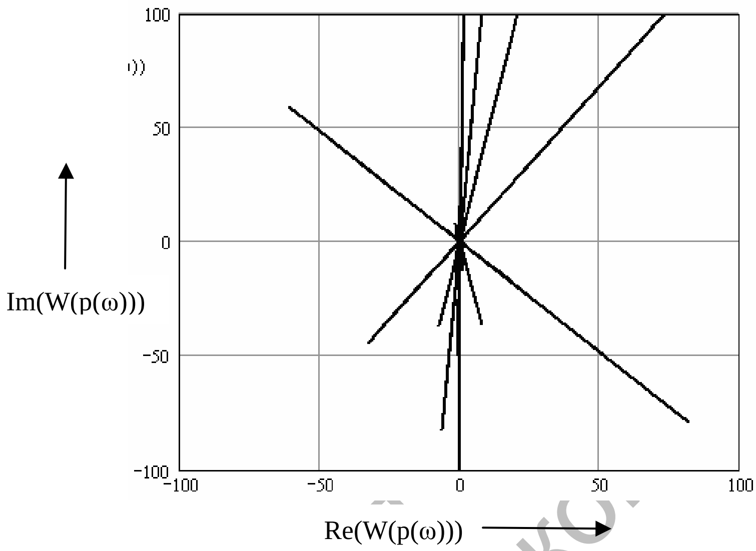

Рис. 4. Амплитудно-фазовая характеристика для промежуточной точки ξ = 0,4

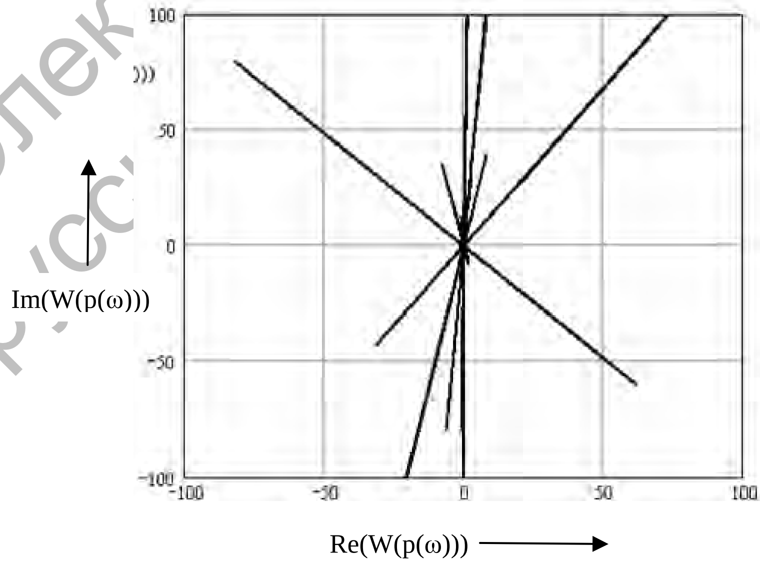

Рис. 5. Амплитудно-фазовая характеристика для промежуточной точки ξ = 0,6

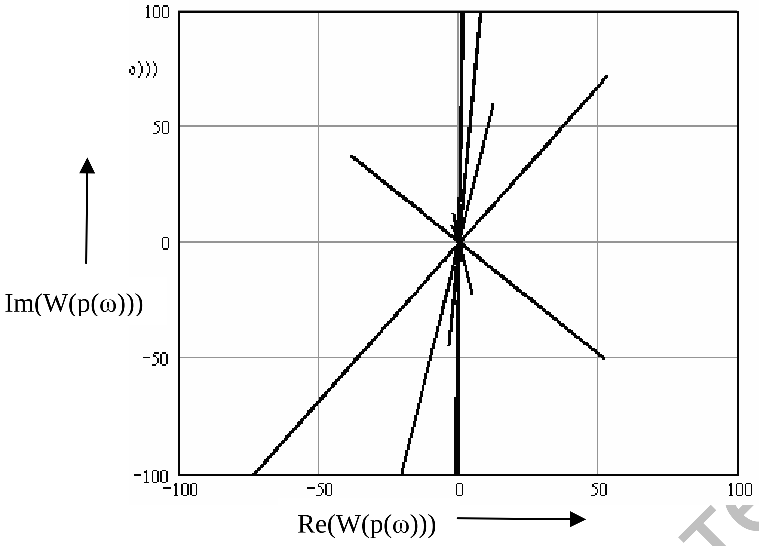

Рис. 6. Амплитудно-фазовая характеристика для промежуточной точки ξ = 0,8

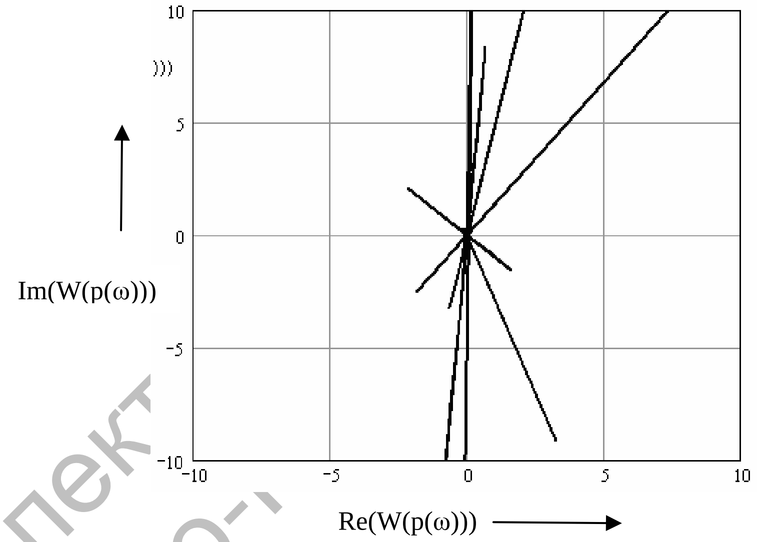

Рис. 7. Амплитудно-фазовая характеристика для конечной точки ξ = 1,0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Киселев, Н. В.** Электроприводы с распределенными параметрами / Н. В. Киселев, В. Н. Мядель, Л. Н. Рассудов. – Л. : Судостроение, 1985. – 220 с.

2. **Воронов, А. А.** Основы теории автоматического управления: особые линейные и нелинейные системы / А. А. Воронов. – 2-е изд., перераб. – М. : Энергоиздат, 1981. – 304 с.: ил.

3. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. пособие для втузов / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – М. : Наука, 1985. – Т. 2.– 560 с.

4. **Рассудов, Л. Н.** Аппроксимация трансцендентных передаточных функций использованием разложений в степенные ряды / Л. Н. Рассудов, А. А. Прокопов // Вопросы теории и расчета элементов и систем АЭП. – 1982. – Вып. 3. – С. 30-32.

5. **Герман-Галкин, С. Г.** Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в Matlab 6.0 : учеб. пособие / С. Г. Герман-Галкин. – СПб. : КОРОНА АСТ, 1997. – 320 с.

6. **Дьяконов, В. П.** MatLab 5. Система символьной математики / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – М. : Нолидж, 1999. – 633 с.

7. **Червяков, Д. С.** Возможность получения аппроксимированных математических моделей электропривода грузоподъемных установок / Д. С. Червяков // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т. – 322 с. : ил.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 01.10.2006

K. V. Ovsiannikov, D. S. Chervyakov,
G. S. Lenevsky
Electromechanic systems with distributed parameters investigation of stability
Belarusian-Russian University

Given article represents results of research of stability of electromechanic systems with the distributed parameters various methods.