ВЕЩЕСТВЕННАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ПОСТОЯННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О.В. Чернова

В области $D \subset \mathbb{C}$ рассмотрим вещественную эллиптическую систему

$$L_A U + aU = F, \quad L_A = \frac{\partial}{\partial y} - A\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор L_A действует в классе l-вектор-функций и определяется матрицей A. Вещественное решение U системы содержит $2l$ компонент, а $2l \times 2l$-матричные коэффициенты A, a и $2l$-компонентный вектор F также вещественны.

Пусть σ_1 (σ_2) – множество собственных значений матрицы A $(\overline{A})$, лежащих в верхней полуплоскости, а l_1 (l_2) – число этих значений, взятое с учетом их кратности, так что $l = l_1 + l_2$.

Согласно [1] существует такая обратимая матрица $l \times l$ матрица B блочной структуры $B = (B_1, \overline{B}_2)$, $B_k \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$, $k = 1, 2$, и жордановы матрицы $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$ с собственными значениями $\nu \in \sigma_k$, что $AB_k = B_k J_k$. В данном случае A вещественная матрицы, значит $l_1 = l_2$ и, следовательно, число l четно. Множества σ_1 и σ_2 совпадают, так как вместе с каждым комплексным корнем существует комплексно-сопряженный той же кратности, поэтому матрицу B можно подчинить условию $B_1 = B_2$, при этом жордановы матрицы будут совпадать: $J_1 = J_2$.

С учетом вышесказанного, удобно число собственных значений вещественной матрицы A обозначить $2l$, положить $\sigma-$ множество собственных значений матрицы A, расположенных в верхней полуплоскости, представить $2l$-компонентный вектор U в следующем виде $U = (U_1, U_2)$, с l-компонентными векторами U_i, $i = 1, 2$, а матрицы B и $\widetilde{J} = B^{-1}AB$ записать в явном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \overline{B}_1 \\ B_2 & \overline{B}_2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}AB = \widetilde{J} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix}, \quad B_i \in \mathbb{C}^{l \times l}, \quad i = 1, 2,$$

где матрица $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ записана в жордановой форме и ее диагональные элементы составляют множество σ собственных значений матрицы A, расположенных в верхней полуплоскости.

Как показывает следующая теорема, с помощью подходящей обратимой линейной подстановки систему (1) всегда можно преобразовать к эквивалентной системе, в которой $l_2 = 0$, т.е. когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости.

Теорема. *В обозначениях (2) подстановка* $\widetilde{\phi} = 2\widetilde{B}^{-1}U = (\phi, \overline{\phi})$, *или в блочной записи, подстановка*

$$U_i = \operatorname{Re} B_i \phi, \quad i = 1, 2,$$

преобразует систему (1) к эквивалентной системе

$$L_J\phi(z) + c\phi(z) + d\overline{\phi(z)} = F_0(z), \quad L_J = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}$$

с $l \times l$*-матричными коэффициентами* $c = \widetilde{a}_{11}$, $d = \widetilde{a}_{12}$, *где*

$$\widetilde{a} = \widetilde{B}^{-1} a \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

есть $2l \times 2l$ *– комплекснозначная матрица.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.7311.2017/8.9).

Литература

1. Чернова О. В. *Эллиптические системы первого порядка с постоянными старшими коэффициентами* // Современные проблемы физико-математических наук: III межд. научн.-практ. конф. (г. Орел, 23–26 ноября 2017). Орел: Изд-во ОГУ им. И.С. Тургенева, 2017. С. 109–112.