ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Шилинец

Функционально-инвариантные решения некоторых уравнений математической физики изучались многими авторами [1–5].

Как известно [1–3], функционально-инвариантным решением уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

называется такое решение $u = u(x, y)$, если произвольная дважды дифференцируемая функция $F(u)$ также является решением этого уравнения.

При распространении колебаний как акустических, так и электромагнитных, основное значение имеет уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где a – константа, u – функция переменных x, y, z и t, которое обычно называется волновым уравнением.

Если рассматривать лишь плоский случай, т.е. когда искомая функция u не зависит от одной из координат, например от координаты z, волновое уравнение (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где u – функция переменных x, y и t.

Для волнового уравнения (2) В.И. Смирновым и С.Л. Соболевым [4] был получен класс функционально-инвариантных решений, который задается равенством

$$l(u)t + m(u)x + n(u)y - k(u) = 0, \tag{3}$$

где $l^2(u) = a^2(m^2(u) + n^2(u))$. Простейшие функционально-инвариантные решения волнового уравнения (2) получаются, если положить l, m и n постоянными, а функцию $k(u)$ равной u. Тогда формула (3) принимает вид

$$u = lt + mx + ny,$$

где $(m^2 + n^2)a^2 = l^2$. Следовательно, $u = f(mx + ny + lt)$ при произвольной функции f будет также решением уравнения (2).

В данной работе будем считать, что искомая функция u уравнения (2) – дуальная функция переменных x, y и t [6]. Цель статьи – построение интегрального представления для одного класса решений уравнения (2).

Пусть D – односвязная область трехмерного действительного евклидова пространства $E^3(x, y, t)$. Рассмотрим дуальные функции вида $f = f_1(x, y, t) + \varepsilon f_2(x, y, t)$, $u = x + iy + \varepsilon f$, где f_1, f_2 – действительные или комплексные функции точки (x, y, t) области D; $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$. Для любых точек $M(x, y, t)$ и $M'(x', y', t')$ области D полагаем $\triangle f = f(M') - f(M)$, $\triangle u = u(M') - u(M)$.

Определение 1. Дуальная функция f называется моногенной в смысле В.С. Федорова (F-моногенной) [7] по дуальной функции u в области D, если существует такая дуальная функция $\theta = \theta_1(x,y,t) + \varepsilon\theta_2(x,y,t)(\theta_i(x,y,t) \ \ (i=1,2))$ – однозначные действительные или комплексные функции точки (x,y,t) области D), что для любой фиксированной точки $M \in D$ и любой переменной точки $M' \in D$ имеем $\triangle f = \theta(M)\triangle u + \alpha(M,M')$, где $\alpha(M,M')/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, $\rho = |\overline{MM'}|$.

Определение 2. Дуальная функция u называется функционально-инвариантным решением уравнения (2), если любая функция f, моногенная в смысле В.С. Федорова по функции u, также является решением волнового уравнения (2).

Легко убедиться в том, что дуальная функция $u = x + iy + \varepsilon t$ является функционально-инвариантным решение волнового уравнения (2).

Пусть V – трехмерная ограниченная область с границей σ $(\sigma \subset D, \ V \subset D)$.

Для функции $f = f_1(x,y,t) + \varepsilon f_2(x,y,t)$ и произвольной точки $M(x_0, y_0, z_0) \notin \sigma$ полагаем [8]

$$I_\sigma = \int\limits_\sigma \{\alpha_1(\varphi'_x - i\varphi'_y - \varepsilon\varphi'_t) + \alpha_2(i\varphi'_x + i\varphi'_y) + \alpha_3(\varepsilon\varphi'_x + \varphi'_t)\} f \, d\sigma, \qquad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ в ее текущей точке $P(x,y,t)$,

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (t-t_0)^2}, \quad \varphi'_x = \frac{x-x_0}{r^3}, \quad \varphi'_y = \frac{y-y_0}{r^3}, \quad \varphi'_t = \frac{t-t_0}{r^3}.$$

Пусть M – произвольная точка области $D, M \notin \overline{V}$.

Теорема 1. *Для любой дуальной функции f, F-моногенной по дуальной функции u в области D, имеем $I_\sigma = 0$, где I_σ определяется равенством (4).*

Теорема 2. *Если дуальная функция f является F-моногенной по дуальной функции u в области D, то для любой точки M, лежащей внутри V, имеем*

$$f(M) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\sigma \{(\alpha_1\varphi'_x + \alpha_2\varphi'_y + \alpha_3\varphi'_t) + (\alpha_2\varphi'_x - \alpha_1\varphi'_y)i + (\alpha_3\varphi'_x - \alpha_1\varphi'_t)\varepsilon\} f \, d\sigma.$$

Литература

1. Соболев С. А. *Функционально-инвариантные решения волнового уравнения* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. 1934. Вып. 5. С. 117–128.

2. Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* Т. 3. Ч. 2. М: ГИТТЛ, 1953. С. 196–204.

3. Еругин Н. П. *О функционально-инвариантных решениях* // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1948. Вып. 15. С. 101–134.

4. Кошляков Н. С. *Основные дифференциальные уравнения математической физики.* М., 1962. С. 128–139.

5. Стельмашук Н. Т. *Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 1. С. 44–47.

6. Стельмашук Н. Т. *О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных* // Сиб. мат. журн. 1964. № 1. Т. 5. С. 166–173.

7. Федоров В. С. *Основные свойства обобщенных моногенных функций* // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257–265.

8. Федоров, В.С. *Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве* // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 227–233.