ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В АЛГЕБРЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ МНЕМОФУНКЦИЙ

А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u' + \frac{1}{x}u = 0.$$

Его классические решения есть функции вида

$$u(x) = \begin{cases} C_1/x, & x < 0; \\ C_2/x, & x > 0. \end{cases}, \tag{1}$$

Обратим внимание на то, что для этого уравнения решение задачи Коши $u(-1) = -C_1$ есть $u(x) = C_1/x$ при $x < 0$, которое уходит на бесконечность при $x \to -0$, при этом в классической теории дифференциальных уравнений невозможно естественным образом по C_1 найти C_2, т.е. продолжить это решение на положительную полуось.

Рассмотрим, как вопрос о решении исследуемого уравнения решается в рамках теории мнемофункций, в которой придается смысл понятию произведения распределений [1, 2].

Прежде всего напомним, что функции $1/x$ соответствует целое семейство распределений вида $P(1/x) + C\delta$, поэтому первое уточнение постановки задачи заключается в том, что мы должны выбрать одно из этих распределений $a = P(1/x) + C\delta$ и рассмотреть уравнение с обобщенным коэффициентом

$$u' + \left[P\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta\right]u = 0. \tag{2}$$

В силу того, что первообразной распределения a является локально интегрируемая функция $g(x) = \ln|x| + C\Theta(x)$, формальное решение уравнения (2) есть

$$u(x) = C_1 \exp[-g(x) + g(-1)] = \begin{cases} C_1/x, & x < 0; \\ C_1 e^{-C}/x, & x > 0. \end{cases}$$

Это функция вида (1), у которой $C_2 = e^{-C}C_1$.

Можно ли эту формально построенную функцию u считать решением в смысле распределений? Прежде всего обратим внимание, что этой функции, как и $1/x$, соответствует целое семейство распределений U и поэтому нужно выяснить, для какого U можно говорить о выполнении равенства

$$U' + aU = 0. \tag{3}$$

Так как U' является распределением, при выполнении равенства получаем, что пара сингулярных распределений a и U такова, что их произведение является распределением.

Точный смысл сказанному придается с помощью общего подхода теории мнемофункций, согласно которому коэффициент a следует заменить на его аппроксимацию гладкими функциями a_ε, рассмотреть соответствующее уравнение

$$u'_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0 \tag{4}$$

и исследовать поведение семейства его решений

$$u_\varepsilon(x) = C_1 \exp\left[-\int\limits_{-1}^{x} a_\varepsilon(s)\,ds\right].$$

Если $u_\varepsilon \to U$, то из уравнения получаем, что $a_\varepsilon u_\varepsilon \to -U'$, т.е. произведение заданных аппроксимаций для a и U ассоциировано с распределением.

В случае аппроксимации распределения a семействами вида

$$a_\varepsilon(x) = a^+(x+i\varepsilon) - a^-(x-i\varepsilon),$$

где пара функций (a^+, a^-) есть аналитическое представление Коши [3], предел решения существует только в двух случаях: когда $a = P(1/x) \pm i\pi\delta$. Тогда решением (4) является семейство $u_\varepsilon(x) = C_1 a_\varepsilon(x)$, которое сходится к $C_1 a$. Причем в этом случае $C_2 = C_1$, а это значит, что полученное решение является наиболее естественным.

Если в уравнении вида (3) коэффициент a есть рациональное распределение, т.е. в аналитическом представлении которого функции $a^\pm$ являются правильными рациональными функциями, то наибольший интерес вызывает случай, когда решение U тоже рациональное распределение, и пара рациональных распределений a и U должна быть такова, что их произведение является распределением. В силу того, что для рациональных распределений известны все пары распределений, произведение которых также является распределением, вопрос состоит в определении условий на распределение a, при выполнении которых распределение U будет рациональным.

Описание всех пар рациональных распределений, произведение которых есть распределение, дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть рациональное распределение f имеет сингулярный носитель $S_f = \{\xi_k : \operatorname{Im}\xi_k = 0\}$, множество $S_g = \{\eta_k : \operatorname{Im}\eta_k = 0\}$ есть сингулярный носитель рационального распределения g, а $S = S_f \bigcap S_g = \{z_1, \ldots, z_m\}$. Не ограничивая общности, считаем, что кратность n_k точек z_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, одинакова для распределений f и g.*

Пусть $f = (f^+, f^-)$, где

$$f^+(z) = \sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A^+_{kj}}{(z-z_k)^j} + \sum_{\xi_k\in S_f\setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C^+_{ij}}{(z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p^+_k}\frac{D^+_{kj}}{(z-\nu_k)^j}, \quad \operatorname{Im}\nu_k < 0;$$

$$f^-(z) = \sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A^-_{kj}}{(z-z_k)^j} + \sum_{\xi_k\in S_f\setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C^-_{ij}}{(z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p^-_k}\frac{D^-_{kj}}{(z-\nu_k)^j}, \quad \operatorname{Im}\nu_k > 0;$$

и распределение $g = (g^+, g^-)$, где

$$g^+(z) = \sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B^+_{kj}}{(z-z_k)^j} + \sum_{\eta_k\in S_g\setminus S}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\widetilde{C}^+_{ij}}{(z-\eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^+}\sum_{j=1}^{l^+_k}\frac{\widetilde{D}^+_{kj}}{(z-\mu_k)^j}, \quad \operatorname{Im}\mu_k < 0;$$

$$g^-(z) = \sum_{z_k \in S} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{B_{kj}^-}{(z-z_k)^j} + \sum_{\eta_k \in S_g \setminus S} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\widetilde{C}_{ij}^-}{(z-\eta_k)^j} + \sum_{k=1}^{s^-} \sum_{j=1}^{l_k^-} \frac{\widetilde{D}_{kj}^-}{(z-\mu_k)^j}, \quad \operatorname{Im} \mu_k > 0.$$

Тогда произведение рациональных мнемофункций $R_a(f)R_a(g)$ *ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого* k, $1 \leqslant k \leqslant m$, *существуют числа* t_k, *что для коэффициентов справедливы соотношения*

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-.$$

Литература

1. Антоневич А. Б., Шагова Т. Г., Шкадинская Е. В. *Алгебра мнемофункций на окружности* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 3 (36). С. 55–62.

2. Антоневич А. Б., Шагова Т. Г. *Вложение распределений в алгебру мнемофункций на окружности* // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 4 (37). С. 52–61.

3. Бремерман Г. *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.* М.: Мир, 1965.