МНОГОМЕРНЫЕ НЕАВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.И. Жук

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0,a]\subset\mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t),\quad i=\overline{1,p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0)=x_0$, где f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – некоторые функции, $x(t)=[x^1(t),x^2(t),\ldots,x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i=\overline{1,q}$, – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^i(t)$, $i=\overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^i(0)=L^i(0^-)=0$ и $L^i(a^-)=L^i(a)$, $i=\overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\quad i=\overline{1,p}, \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int_0^{1/\gamma^j(n)}L^j(t+s)\times$ $\times\,\rho_n^j(s)\,ds$, где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, для $j=\overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n\to\infty$, а для $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n\to 0$, $\rho^j\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho^j\subseteq[0,1]$, $\int_0^1\rho^j(s)\,ds=1$, а $f_n=f*\widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_0,x_1,\ldots,x_p)=$ $=n^p\widetilde{\rho}(nx_0,nx_1,\ldots,nx_p)$, $\widetilde{\rho}\in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho}\geqslant 0$, $\int_{[0;1]^{p+1}}\widetilde{\rho}(x_0,x_1,\ldots,x_p)\,dx_0\,dx_1\ldots dx_p=$ $=1$, $\operatorname{supp}\widetilde{\rho}\subset[0;1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int\limits_0^t f^{ij}(s,x(s))\,dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\leqslant t}S^i(\mu_r,x(\mu_r^-),\Delta L(\mu_r)),\quad i=\overline{1,p}, \tag{3}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющая функции $L^j(t)$, μ_r^j, $r=1,2,\ldots,$ – точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L^j(\mu_r)=L^{jd}(\mu_r^+)-L^{jd}(\mu_r^-)$ – величина скачка, $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{b}u^j\int\limits_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s^-,\mu,x,u))\,dH(s-1)+\sum_{j=b+1}^{q}u^j\int\limits_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))\,ds,$$

в котором $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$.

Теорема. *Пусть* f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$ $j = \overline{1,b}$ – *непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$, $\gamma^j(n) \to \infty$ *так, что для* $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, *и для* $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в* $L^p(T)$, *если* $\int |x_{n0}(\tau_t) - x_0|^p \, dt \to 0$.

Аналогичная теорема в пространстве $L^1(T)$ была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л. *Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57. № 6. С. 20–23.