ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА МЕР И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

А.Р. Миротин, И.С. Ковалёва

Одной из задач теории обработки сигналов является задача построения фильтров с заданными свойствами. Целью данной работы является рассмотрение фильтров с частотными характеристиками, являющимися функциями типа Маркова–Стилтьеса. Данные фильтры могут хорошо аппроксимироваться фильтрами с рациональными системными функциями(см., например, [1–3]), которые хорошо изучены и представляют большой практический интерес (см., например, [4, 5]).

Определение [6, гл. 6]. Преобразованием Маркова–Стилтьеса меры $\mu \in$ $\in M^b([0,1],\mathbb{C})$ называется функция, задаваемая при $z \in \mathbb{C}\backslash[1,+\infty)$ соотношением

$$S\mu(z) = \int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1}$$

При $z \in [1,+\infty)$ интеграл в правой части (1) понимается как предел

$$S\mu(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{[0,1]\bigcap\{|t-1/z|>\varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1-tz}.$$

Пусть $Dx(k) = x(k-1)$ – оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Рассмотрим оператор

$$F(D) := \sum_{n=0}^{\infty} h(n)D^n,$$

определенный первоначально на финитных слева последовательностях из $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Теорема 1. *Пусть* $F(z) = S\mu(z)$. *Если*

$$\int\limits_0^1 \frac{d|\mu|(t)}{1-t} < \infty, \tag{2}$$

то оператор $F(D)$ *однозначно продолжается до стационарного, каузального и устойчивого фильтра с частотной характеристикой* F *и амплитудным искажением* $\|F\|_{H^\infty}$; *при этом* $\|F(D)\| = \|h\|_{\ell^1}$ *и*

$$F(D) = \int\limits_{[0,1)} (I-tD)^{-1}\, d\mu(t),$$

где интеграл Бохнера сходится по норме оператора.

При $\mu \geqslant 0$ *условие (2) является также и необходимым для наличия у оператора* $F(D)$ *стационарного и каузального продолжения. Кроме того, в этом случае фильтр* $F(D)$ *обратим, и его обратный имеет вид*

$$F(D)^{-1} = -\left(\frac{1}{F_1}\right)(D^{-1})D,$$

где F_1 *есть функция из* R_1 *с представляющей мерой* μ, *а* $(1/F_1)(D^{-1})$ *понимается в смысле* Q_1*-исчисления.*

Предыдущая теорема показывает, что фильтры вида $F(D)$ с положительной представляющей мерой обладают хорошими свойствами. Следующая теорема описывает эти фильтры в терминах их частотной характеристики (или, что равносильно, системной функции), а также в терминах их импульсной характеристики.

Теорема 2. *Пусть* Φ *есть стационарный и каузальный фильтр с системной функцией* $\tilde{H}$ *и импульсной характеристикой* W. *Следующие утверждения равносильны:*

1) Φ *имеет вид* $F(D)$, *где* $F = S\mu$, $\mu \in M_+^b([0,1])$.

2) Функция $\tilde{H}(1/z)$ *удовлетворяет условиям теоремы 5 из [7].*

3) $\Delta^n W(k) \geqslant 0$ $(k, n \in \mathbb{Z}_+)$, *т.е. последовательность* W *вполне монотонна.*

При этом $F(z) = \tilde{H}(1/z)$, *а* W *– последовательность моментов меры* μ.

Теорема 3. *Стационарный каузальный фильтр* Φ *с системной функцией* $\tilde{H}$ *имеет вид* $F(D)$, *где* $F = S\mu$, $\mu \in M^b\left([0,1], \mathbb{C}\right)$, *тогда и только тогда, когда функция* $\tilde{H}(1/z)$ *удовлетворяет условиям теоремы 4 из [7]. При этом* $F(z) = \tilde{H}(1/z)$.

Литература

1. Andersson J.-E. *Rational approximation to function like* x^α *in integral norms* // Analysis Math. 1988. V. 14. № 1. P. 11–25.

2. Andersson J.-E. *Best rational approximation to Markov functions* // J. of Approx. Theory. 1994. V. 76. № 2. P. 219–232.

3. Вячеславов Н. С., Мочалина Е. П. *Рациональные приближения функций типа Маркова–Стилтьеса в пространствах Харди* H^p, $0 < p \leqslant \infty$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 4. С. 3–13.

4. Сиберт У. М. *Цепи и сигналы системы*: в 2 частях. Ч. 2. М.: Мир, 1988.

5. Papoulis A. *Signal analysis.* New York: McGrow Hill, 1977.

6. Миротин А. Р. *Гармонический анализ на абелевых полугруппах.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.

7. Ковалёва И. С. *Преобразование Маркова–Стилтьеса мер и некоторые его приложения* // Весці. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2018. Т. 54. № 4. С. 468–479.

8. Миротин А. Р. *О некоторых свойствах функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 4. С. 63–67.

9. Атвиновский А. А. *Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II* // Изв. вузов. Математика. 2015. № 5. С. 3–16.

10. Атвиновский А. А. *Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения* // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 3 (16). С. 55–60.