КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С.М. Ситник

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. С их помощью были доказаны многие фундаментальные результаты для различных классов дифференциальных уравнений.

В докладе будет рассказано основное содержание монографий [1] и [2], при этом достаточно подробно изложен композиционный метод операторов преобразований, также изложенный в [3–5]. Монография [1] составлена из докторской диссертации Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010) и части докторской диссертации С.М. Ситника, защищенной в 2016 г. Следует отметить, что оба автора, учитель и его ученик, принадлежат школе известного Воронежского математика Ивана Александровича Киприянова, получившего фундаментальные результаты для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя по одной или части переменных.

Изложим более подробно содержание [1]. Монография посвящена приложениям метода операторов преобразования к исследованию дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. Особое внимание уделяется дифференциальным уравнениям в частных производных с операторами Бесселя. Монография содержит подробное введение в теорию операторов преобразования и достаточно обширный список литературы.

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и ее приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова. К числу важных результатов В.В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования.

Особо следует выделить введенный В.В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введенного им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана–Лиувилля, В.В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С.Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В.В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свертки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «K-следом» в честь В.В. Катрахова, который ввел это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «K-следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В.В. Катраховым была доказана корректность постановки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С.Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В.В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

Приведем содержание книги по главам.

Глава 1. Введение (исторические сведения, функциональные пространства, специальные функции, интегральные преобразования).

Глава 2. Операторы преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта и их модификации.

Глава 3. Теория операторов преобразования Бушмана–Эрдейи.

Глава 4. Общие весовые краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений.

Глава 5. Новые краевые задачи для уравнения Пуассона с особенностями в изолированных точках.

Глава 6. Композиционный метод построения сплетающих соотношений между решениями дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Глава 7. Приложения метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М. Ландиса.

Список литературы в [1] содержит около 650 ссылок.

В монографии [2] излагаются как известные, так и недавно полученные результаты теории операторов преобразования, представляющей собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния.

Литература

1. Катрахов В. В., Ситник С. М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений* // Совр. математика. Фунд. направления. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

2. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* М.: Физматлит, 2019.

3. Катрахов В. В., Ситник С. М. *Композиционный метод построения B-эллиптических, B-гиперболических и B-параболических операторов преобразования* // Докл. АН СССР. 1994. Т. 337. № 3. С. 307–311.

4. Ситник С. М. *Операторы преобразования и их приложения* // В сб.: Исследования по современному анализу и математическому моделированию. (Ред. Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев) 2008. Владикавказ, С. 226–293.

5. Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E. L., Sitnik S. M. *Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations* // Electron. J. Differ. Equat. 2018. № 130. P. 1–27.