# АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко**

Рассмотрим систему $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю комплексные числа. Для индекса $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ и мультииндекса $\vec{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_k)$, $m_j\in\mathbb{N}_0$, существуют многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)=Q_{n,\vec{m}}(z;\vec{f})\not\equiv 0$, $P^j_{n,\vec{m}}(z)=P^j_{n,\vec{m}}(z;\vec{f})$, $j=1,2,\ldots,k$; $\deg Q_{n,\vec{m}}\leqslant m$, $\deg P^j_{n,\vec{m}}\leqslant n_j$, $j=1,2,\ldots,k$, удовлетворяющие условиям

$$R^j_{n,\vec{m}}(z;\vec{f})=Q_{n,\vec{m}}(z)e^{\lambda_j z}-P^j_{n,\vec{m}}(z)=O(z^{n+|m|+1}),\quad z\to 0,$$

где $|m|=\sum_{i=1}^k m_i$, $n_j=n+|m|-m_j$, $j=1,2,\ldots,k$. Тем самым единственным образом определены рациональные функции

$$\pi^j_{n,\vec{m}}(z)=\pi^j_{n,\vec{m}}(z;\vec{f})=\frac{P^j_{n,\vec{m}}(z)}{Q_{n,\vec{m}}(z)},\quad j=1,2,\ldots,k,$$

которые называются *аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода* (или *совместными аппроксимациями Паде*), а многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P^1_{n,\vec{m}}(z)$, $\ldots$, $P^k_{n,\vec{m}}(z)$ – *многочленами Эрмита–Паде 2-го рода*. Диагональному случаю соответствует набор индексов $n=m_1=\ldots=m_k$.

Многочлены Эрмита–Паде 2-го рода для системы $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ были введены Ш. Эрмитом в работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа $e$. Им также были найдены явные выражения для этих многочленов и остаточной функции $R^j_{n,\vec{m}}(z;\vec{f})$.

Следующая теорема дополняет и обобщает результаты работы [2]. Используемые здесь обозначения и подробный обзор по данной тематике можно найти в [2].

**Теорема.** *Пусть* $n,m_1,m_2,m_3$ *– произвольные целые неотрицательные числа, а* $\pi^j_{n,\vec{m}}(z)$, $j=1,2,3$, *– аппроксимации Эрмита–Паде для* $\vec{f}=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty}|m|/\sqrt{n}=0$, *то для любого комплексного числа* $z$ *равномерно по всем* $|m|$, $0\leqslant\leqslant|m|\leqslant m(n)$, *при* $n\to+\infty$

$$e^z-\pi^1_{n,\vec{m}}(z)=(-1)^{|m|}\frac{2^{m_3}m_1!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!}e^{\frac{m_1+1}{n+m_1+2}z}e^{\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{2z}-\pi^2_{n,\vec{m}}(z)=(-1)^{|m|}\frac{(-1)^{m_1}2^{n+m_2+1}m_2!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!}e^{\frac{2(m_2+1)}{n+m_2+2}z}e^{\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{3z}-\pi^3_{n,\vec{m}}(z)=(-1)^{m_3}\frac{2^{m_1}3^{n+m_3+1}m_3!n!z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!}e^{\frac{3(m_3+1)}{n+m_3+2}z}e^{\frac{m_1+2m_2+3m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф18М-025).

**Литература**

1. Hermite C. *Sur la fonction exponentielle* // C.R. Acad. Sci. 1873. V. 77. P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

2. Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита–Паде функций Миттаг–Леффлера* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 241–258.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/