# ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**А.П. Шилин**

Зададим на комплексной плоскости простую гладкую замкнутую кривую $L$. Из двух областей, на которые кривая $L$ разбивает комплексную плоскость, пусть область $D$ является ограниченной. Считаем для определенности $0 \in D$. Выберем на кривой $L$ ориентацию, оставляющую область $D$ слева.

Будем искать на кривой $L$ дважды $H$-непрерывно дифференцируемую комплекснозначную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению с интегралами в смысле конечной части по Адамару:

$$(a_1+b_1)\varphi(t)+(a_2+2t^3-b_2t^2)\varphi'(t)+(1+t^4)\varphi''(t)+\frac{a_1-b_1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{a_2-2t^3+b_2t^2}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^2}+\frac{2(1-t^4)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^3}=\sum_{k=n}^{m}\alpha_k t^k, \quad t\in L. \qquad (1)$$

Здесь $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $\alpha_k$ – заданные комплексные числа, $k=\overline{n,m}$, $n$, $m$ – целые числа, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$.

Обозначим через $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – корни уравнения $\lambda^2+a_2\lambda+a_1=0$, а через $\lambda_3$ и $\lambda_4$ – корни уравнения $\lambda^2+b_2\lambda+b_1=0$. Считаем для определенности, что $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_3\neq\lambda_4$.

**Теорема.** *Уравнение* (1) *безусловно разрешимо. Его решение имеет вид*

$$\varphi(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+C_3\left(1-\frac{b_1}{a_1}-e^{\lambda_3/t}\right)+C_4\left(1-\frac{b_1}{a_1}-e^{\lambda_4/t}\right)+\sum_{k=n}^{m}\beta_k t^k,$$

*где* $C_1$, $C_2$ $C_3$, $C_4$ *– произвольные комплексные числа, а* $\beta_k$ *– вполне определенные комплексные числа,* $k=\overline{n,m}$.

Для нахождения чисел $\beta_k$ указан конструктивный алгоритм, имеющий характер метода неопределенных коэффициентов.

Решение уравнения (1) осуществляется по той же схеме, что и в [1, 2]: обобщенные формулы Сохоцкого – краевая задача для аналитических функций – линейные дифференциальные уравнения для аналитических функций.

Замечательной особенностью уравнения (1) является возможность построения его решения без вычисления квадратур.

Уравнение (1) допускает обобщения как в отношении увеличения его порядка, так и в отношении усложнения правой части.

### Литература

1. Зверович Э. И. *Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54. № 6. С. 5–8.

2. Зверович Э. И., Шилин А. П. *Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2018. Т. 54. № 4. С. 404–407.