ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОРНЯ ЗУБА В ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКЕ

**С.М. Босяков, Г.И. Михасев**



Рассмотрим поступательное перемещение корня зуба в вязкоупругой периодонтальной связке в горизонтальном направлении в предположении, что корень зуба абсолютно жестким по сравнению с тканью периодонта. В этом случае уравнения движения вязкоупругой периодонтальной связки можно представить в виде [1]

$$a_{11}\left(u(r,\varphi,t)-\int\limits_0^t K(\tau)u(r,\varphi,t-\tau)\,d\tau\right)+$$

$$+a_{12}\left(v(r,\varphi,t)-\int\limits_0^t K(\tau)v(r,\varphi,t-\tau)\,d\tau\right)=\varepsilon\frac{\partial^2 u(r,\varphi,t)}{\partial t^2},$$

$$a_{21}\left(u(r,\varphi,t)-\int\limits_0^t K(\tau)u(r,\varphi,t-\tau)\,d\tau\right)+$$

$$+a_{22}\left(v(r,\varphi,t)-\int\limits_0^t K(\tau)v(r,\varphi,t-\tau)\,d\tau\right)=\varepsilon\frac{\partial^2 v(r,\varphi,t)}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где

$$a_{11}=r(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1-\nu}{r}+\frac{1-2\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$a_{12}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}-\frac{3-4\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad a_{21}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}+\frac{3-4\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$a_{22}=\frac{(1-2\nu)r}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-2\nu}{2}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1-2\nu}{r}+\frac{1-\nu}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Здесь $u(r,\varphi,t)=u_r(r,\varphi,t)/h$, $v(r,\varphi,t)=u_\varphi(r,\varphi,t)/h$ – безразмерные перемещения, $r=r_0/h$ – безразмерная радиальная координата, $h$ – высота корня зуба, $\varepsilon = \rho h^2(1+\nu)(1-2\nu)/(E_0 t_0^2)$ – безразмерный параметр, $t_0$ – характерное время (принимается равным 1 ч); $\rho$ – плотность тканей периодонта, $E_0$ и $\nu$ – мгновенный модуль упругости коэффициент Пуасона периодонтальной связки.

Будем считать, что в случае поступательных перемещений корня зуба в периодонтальной связке решение системы (1) можно представить в виде произведений двух независимых функций

$$u(r,\varphi,t)=u_1(r,t)\cos(\varphi),\quad v(r,\varphi,t)=v_1(r,t)\sin(\varphi).$$

После преобразований системы (1) применим преобразование Лапласа при начальных условиях

$$u_1(r,0)=u_2(r),\quad v_1(r,0)=v_2(r),\quad \left.\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1(r,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0,$$

где $u_2(r)$ и $v_2(r)$ – начальные перемещения точек периодонтальной связки при перемещении корня зуба на величину $u_0$.

Решение преобразованной системы (1) представим в виде следующего асимптотического разложения в ряд по малому параметру $\varepsilon$:

$$u_1^*(r,p)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{0k}^*(r,p)\varepsilon^{k-1},\quad v_1^*(r,p)=\sum_{k=1}^{\infty}v_{0k}^*(r,p)\varepsilon^{k-1}. \tag{2}$$

Функции $u_{01}^*(r,p)$ и $v_{01}^*(r,p)$ определяются следующим образом [2]

$$u_{01}^*(r,p)=c_{01}(1-4\nu)r^2+\frac{c_{02}}{r}-\frac{c_{03}}{2(3-4\nu)}+c_{03}\ln(r)+c_{04},$$

$$v_{01}^*(r,p)=c_{01}(5-4\nu)r^2+\frac{c_{02}}{r}-\frac{c_{03}}{2(3-4\nu)}-c_{03}\ln(r)-c_{04},$$

где $c_{0k}$, $k=\overline{1,4}$, являются неизвестными постоянными.

С учетом начальных распределений перемещений $u_2(r)$ и $v_2(r)$, выражения для функций $u_{02}^*(r,p)$ и $v_{02}^*(r,p)$ принимают вид

$$u_{02}^*(r,p)=b_{13}r^4+b_{23}r^2\ln(r)+b_{33}+b_{43}r^2,\quad v_{02}^*(r,p)=f_{13}r^4+f_{23}r^2\ln(r)+f_{33}+f_{43}r^2,$$

где коэффициенты $b_{k3}$ и $f_{k3}$ определяются упругими постоянными периодонтальной связки и ее геометрическими размерами, а также постоянными $c_{0k}$, $k=\overline{1,4}$.

Обратное преобразование Лапласа функций (2) выполним в предположении, что релаксация напряжений в периодонтальной связке описывается ядром релаксации Максвелла $K(t)=A_m\exp(-b_m t)$. Неизвестные константы $c_{0k}$, $k=\overline{1,4}$ определим из граничных условий

$$u_1(b,0)=u_0,\quad v_1(b,0)=u_0,\quad u_1(b_1,0)=0,\quad v_1(b_1,0)=0,$$

где $b$ и $b_1$ – радиусы внутреннего и внешнего контура периодонтальной связки.

Параметры $A_m$ и $b_m$ ядра релаксации Максвелла $K(t)=A_m\exp(-b_m t)$ определяются в предположении, что релаксация напряжений в тканях периодонтальной связки после приложения нагрузки (и последующего мгновенного смещения) происходит приблизительно в течении пяти часов [3].

Работа выполнена в рамках задания 1.8.01.1 «Разработать математические модели и методы решения новых классов краевых задач механики сплошных сред применительно к актуальным современным проблемам науки и техники» Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

**Литература**

1. Bosiakov S., Mikhasev G., Rogosin S. *Viscoelastic behavior of periodontal ligament: stresses relaxation at translational displacement of a tooth root* // In: Modern Problems in Applied Analysis, Trends in Mathematics (P. Drygas, S. Rogosin, Eds.). Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2018. P. 51–64.

2. Bosiakov S., Mikhasev G. *Mathematical model for analysis of translational displacementsof tooth root* // Math. Model. and Anal. 2015. V. 20. № 4. P. 490–501.

3. Van Driel W. D., Van Leeuwen E. J., Von den Hoff J. W., Maltha J. C., Kuijpers-Jagtman A. M. *Time-dependent mechanical behaviour of the periodontal ligament* // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Part H: Journal of Engineering in Medicine. 2000. V. 214. P. 497–504.