

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА НА ГРАФАХ КЭЛИ

М.М. Васьковский, А.О. Задорожнюк

Рассмотрим электрическую цепь, соответствующую связному неориентированному графу $G(V, E)$. Вершину v_a выберем источником тока, v_b – стоком, общий ток I по цепи примем за единицу. Будем считать, что ребро (v_i, v_j) обладает проводимостью $c_{ij} = 1$ ($c_{ij} = 0$, если такого ребра нет в E). По законам Киргхофа и Ома, потенциалы вершин удовлетворяют система уравнений

$$Lu = 1_a - 1_b, \quad (1)$$

где L – матрица Лапласа графа, т.е. разность диагональной матрицы степеней вершин и матрицы смежности, u – вектор потенциалов в вершинах, 1_i – вектор с единицей на i -й позиции и нулями на остальных.

Оператор L – дискретный аналог оператора Лапласа $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. Дискретный градиент $d : L_2(V) \rightarrow L_2(E)$ определим как $(df)(e) = f(e^+) - f(e^-)$, e^+ и e^- – концы ребра $e \in E$, знаки «+» и «-» означают направление изменения потенциала вдоль ребра. Дискретную дивергенцию $d^* : L_2(E) \rightarrow L_2(V)$ определим как

$$(d^*f)(v) = \sum_{\substack{e \in E \\ v=e^-}} f(e) - \sum_{\substack{e \in E \\ v=e^+}} f(e), \quad v \in V.$$

Тогда L будет равен $-d^*d$.

Сопротивление $R_{a,b}$ в цепи определяется равенством $R_{a,b} = (u_a - u_b)/I$.

Замечание. Ранг матрицы L равен $|V| - 1$, так что один из потенциалов можно сразу зафиксировать, например, $u_b = 0$. Тогда $R_{a,b} = u_a$

Пусть имеется группа Γ и ее непустое подмножество T без единичного элемента, такое что $\forall t \in T : t^{-1} \in T$. Граф Кэли $\operatorname{Cay}(\Gamma, T)$ над группой Γ с порождающим множеством T – это граф, в котором вершины – элементы Γ , и две вершины g_1, g_2 смежны тогда и только тогда, когда $g_2 g_1^{-1} \in T$.

Теорема. Пусть $G_n = \operatorname{Cay}(\Gamma_n, T_n)$, $n \in \mathbb{N}$ – последовательность связных вложенных графов Кэли, т.е. $\Gamma_n < \Gamma_{n+1}$, $T_n \subset T_{n+1}$. Если

1) $\exists \mu, b > 0$ такие, что $\operatorname{diam}(G_n) \leq b \log^\mu |\Gamma_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\exists \nu, c > 0$ такие, что $d_n := |T_n| \geq c \log^\nu |\Gamma_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $R_{u,v} = O(1/d_n^{1-\varepsilon})$ для любых $n \in \mathbb{N}$ $u, v \in V_n$.

Если к тому же

3) $\exists \alpha \in (0, 1)$ такое, что $|\Gamma_{n+1}| \leq |\Gamma_n| \exp(n^\alpha)$;

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ граф G_n – двудольный и $\exists s \geq 2$, $t \geq 3$, $t \geq s$ такие, что G_n не содержит полных двудольных графов $K_{s,t} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

то $R_{u,v} = \Theta(1/d_n)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ $u, v \in V_n$.

Литература

1. Benjamini I., Kozma G. A resistance bound via an isoperimetric inequality // Combinatorica. 2005. V. 25. № 6. P.645–650.

