

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

М.М. Васьковский, И.В. Качан

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) заданы d -мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d -мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dW(t) + \sigma(t, x(t)) dB(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ – детерминированные функции.

Стохастическое дифференциальное уравнение (1) называется уравнением смешанного типа, если в определении решения интеграл по стандартному броуновскому движению $W(t)$ понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B(t)$ определяется как потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса.

Ограничимся случаем $d = 1$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t) dt + v(t) dW(t) + b(t) dB(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

решение которого выражается формулой

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau + \int_0^t v(\tau) dW(\tau) + \int_0^t b(\tau) dB(\tau).$$

Теорема 1. Уравнение (1) с функцией $g(t, x) \neq 0$ приводимо к уравнению (2) с помощью обратимого по x преобразования $y = F(t, x)$, $F \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ тогда и только тогда, когда найдутся функции $q(t), r(t)$ такие, что оказываются выполнеными соотношения

$$g(t, x) \left(\frac{g'_t(t, x)}{g^2(t, x)} + \left(\frac{f(t, x)}{g(t, x)} \right)'_x + \frac{1}{2} g''_{x^2}(t, x) \right) = r(t) \quad u \quad \frac{\sigma(t, x)}{g(t, x)} = q(t).$$

Предложение. Решение линейного неоднородного уравнения

$$dx(t) = (\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)) dt + (\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)) dW(t) + (\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)) dB(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

выражается формулой

$$x(t) = x_0(t) \left(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau) \right),$$

в которой

$$x_0(t) = \exp \left(\int_0^t \left(\alpha_1(\tau) - \frac{1}{2}\beta_1^2(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \beta_1(\tau) dW(\tau) + \int_0^t \gamma_1(\tau) dB(\tau) \right)$$



– решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием $x_0(0) = 1$.

Рассмотрим одномерное ($d = 1$) автономное уравнение (1), в котором $f(t, x) = f(x)$, $g(t, x) = g(x)$, $\sigma(t, x) = \sigma(x)$.

Теорема 2. Автономное уравнение (1) с функцией $g(x) \neq 0$ и выражением $A(x) = f(x)/g(x) - g'(x)/2$ таким, что $A'(x) \neq 0$, приводимо к уравнению (3) тогда и только тогда, когда найдутся постоянные c_1 , c_2 такие, что будут выполнены соотношения $(g(x)A'(x))'/A'(x) = c_1$ и $\sigma(x)/g(x) = c_2$.

Вернемся к общему случаю $d \in \mathbb{N}$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t))) dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t)) dB(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

Теорема 3. Пусть функция $g(t, x)$ имеет непрерывные частные производные g'_t , g'_x , g''_{x^2} . В таком случае процесс $x(t)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (4).

Литература

- Леваков А. А. Стохастические дифференциальные уравнения. Минск: БГУ, 2009.

