ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

В сообщение предлагается подход к исследованию известной в теории магнитоупорядоченных сред проблемы: построению физически обоснованного эволюционного уравнения, для описания на макроскопическом уровне изменения со временем t поля плотности магнитного момента $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, для ферромагнитным образом упорядоченных твердотельных сред [1, 2]. Эта проблема связан с тем, что обычно используемое в ферродинамике т.н. *уравнение Ландау–Лифшица*, которое в простейшем случае сферически симметричной в магнитном смысле среды и в отсутствие внешнего магнитного поля имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \gamma[\boldsymbol{M}, \Delta\boldsymbol{M}], \qquad (1)$$

обладает двумя свойствами, которые не позволяют его считать, вполне адекватным.

Во-первых, это уравнение не описывает диссипативных процессов (магнитного трения), так как линейный оператор, получаемый линеаризацией правой части (1), не является диссипативным. Во-вторых, это уравнение не обладает инваринатом $(\nabla, \boldsymbol{M})$, а это обстоятельство не обеспечивает сохранения со временем его соленоидальности $(\nabla, \boldsymbol{M}) = 0$, что необходимо, так как поле $\boldsymbol{M}$ представляет собой поле магнитной индукции внутри ферромагнитной среды.

Оказывается, что преодоление этих недостатков основного уравнения ферродинамики не удается достичь посредством традиционных методов конструирования эволюционных уравнений, принятых в теоретической физике. В связи с этим, для решения проблемы предлагается пойти по следующему пути. Необходимо решить задачу об описании всего класса эволюционных уравнений для псевдовекторного поля $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t)$, обладающего двумя инвариантами $\boldsymbol{M}^2(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{const}$ и $(\nabla, \boldsymbol{M}) = 0$ и удовлетворяющего базовым физическим симметрийным принципам. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Линейное многообразие всех дифференциальных эволюционных по t уравнений*

$$\dot{M}_j = \mathsf{L}_j[\boldsymbol{M}]$$

для псевдовекторных соленоидальных унимодальных полей $\boldsymbol{M}$ на $\mathbb{R}^3$ из пространства $[\mathrm{C}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^3$ с дифференциальными операторами $\mathsf{L}_j : [\mathrm{C}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^3 \mapsto [\mathrm{C}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^3$, $j = 1,2,3$, второго порядка дивергентного типа, $\mathsf{L}_j[\boldsymbol{M}] = \nabla_j S_{ij}[\boldsymbol{M}]$, и таких, которые трансляционно инвариантны относительно сдвигов в $\mathbb{R}^3$ и времени t; ковариантны относительно действия преобразований группы $\mathbb{O}_3$ пространства $\mathbb{R}^3$; оставляют инвариантным любое многообразие $\{\boldsymbol{M} : (\nabla, \boldsymbol{M}) = 0,\ \boldsymbol{M}^2 = M^2,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\} \subset [\mathrm{C}_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)]^3$, независимо от значения $M^2 \in (0,\infty)$, состоит из однопараметрического семейства операторов

$$\mathsf{L}_j[\boldsymbol{M}] = \gamma\nabla_k([\boldsymbol{M},\nabla]_j M_k - [\boldsymbol{M},\nabla]_k M_j + M_j[\nabla,\boldsymbol{M}]_k -$$

$$- M_k[\nabla,\boldsymbol{M}]_j + \varepsilon_{jkl}(\boldsymbol{M},\nabla)M_l), \quad \gamma \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

В этом утверждении не предполагается, что уравнения, описываемые формулой (2), обладают решениями, удовлетворяющими каким-либо начально-краевым условиям. Эта формула описывает только все возможности для конструирования дифференциального уравнения, адекватного физической ситуации, которые представляются наложенными на него ограничениями.

Литература

1. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. *Спиновые волны.* М.: Наука, 1967.

2. Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С. *Нелинейные волны намагниченности.* К.: Наукова думка, 1988.