О НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль

При изучении автоколебательных систем большое внимание уделяется исследованию случайных колебаний [1–3]. В том случае, когда ставится задача проведения качественных аналитических исследований, применение метода марковских диффузионных процессов даже в случае широкополосных шумов может оказаться невозможным из-за неинтегрируемости в квадратурах соответствующих уравнений Колмогорова–Фоккера–Планка (КФП).

В работе [4] для исследования установившихся случайных колебаний в автоколебательных системах применен метод канонических разложений [5]. Приведенные в [4] расчеты для конкретных колебательных систем позволяют утверждать, что при применении описанной в [4] методики получены приближенные верхние оценки математического ожидания m_a амплитуды стационарных колебаний систем с аддитивными шумами, совпадающие с наиболее вероятными значениями амплитуды. Основываясь на данном факте, сформулируем следующую теорему.

Теорема. *Наиболее вероятные значения амплитуды a и фазы θ стационарных случайных колебаний в системах вида*

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\xi(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ – стационарный широкополосный случайный процесс, определяются из соотношений

$$a \underset{t}{M}[f(t, a(t), \theta(t)) \sin\psi] = \frac{\sigma^2}{4\omega}, \quad \underset{t}{M}[f(t, a(t), \theta(t)) \cos\psi] = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем теорему для систем, удовлетворяющих условиям потенциальности соответствующих уравнений КФП. В случае выполнения условия потенциальности решение уравнения КФП может быть записано в виде

$$W(a, \theta) = C \exp\left\{2 \int \frac{K_1}{K_{11}}\, da + \frac{K_2}{K_{22}}\, d\theta\right\},$$

где $K_1(a, \theta)$, $K_2(a, \theta)$, $K_{11}(a, \theta)$, $K_{22}(a, \theta)$ определяются из соотношений

$$K_1(a, \theta) = \underset{t}{M}\left[-\frac{1}{\omega} f \sin\psi + \frac{g^2 \cos^2}{2\omega^2 a}\right], \quad K_2(a, \theta) = \underset{t}{M}\left[-\frac{1}{a\omega} f \cos\psi + \frac{g^2 \sin 2\psi}{2\omega^2 a^2}\right],$$

$$K_{11}(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{2\omega^2}, \quad K_{22}(a, \theta) = \frac{\sigma^2}{2\omega^2 a^2}.$$

Выписывая условие потенциальности

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{K_1}{K_{11}}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{K_2}{K_{22}}\right),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(K_1) = \frac{\partial}{\partial a}(K_2 a^2). \tag{3}$$

Таким образом, соотношение (3) является условием потенциальности для систем с непараметрическими широкополосными шумами, спектральная плотность которых изменяется медленно в достаточно большом диапазоне частот, включающем собственные частоты системы.

При выполнении условия (3) и в том случае, когда

$$\frac{K_2(0,\theta)}{K_{22}(0)} = 0$$

(а это условие для реальных колебательных систем практически всегда имеет место), решение соответствующего уравнения КФП может быть представлено в виде

$$W(a,\theta) = C\exp\left\{\frac{4\omega^2}{\sigma^2}\int K_1(a,\theta)\,da\right\}.$$

Для нахождения наиболее вероятных значений амплитуды и фазы стационарных колебаний получаем

$$K_1(a,\theta) = 0, \quad \int \frac{\partial}{\partial\theta}(K_1(a,\theta))\,da = 0.$$

С учетом приведенных соотношений, имеем

$$K_1(a,\theta) = -\frac{1}{\omega}\underset{t}{M}\left[f\left(t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\right)\sin\psi\right] + \frac{\sigma^2}{4\omega^2 a} = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial a}\left(K_2(a,\theta)a^2\right)da = K_2(a,\theta)a^2 = 0,$$

или, окончательно,

$$a\underset{t}{M}\left[f\left(t, a(t), \theta(t)\right)\sin\psi\right] = \frac{\sigma^2}{4\omega}, \quad \underset{t}{M}\left[f\left(t, a(t), \theta(t)\right)\cos\psi\right] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Несмотря на то, что доказательство теоремы проведено лишь для случая потенциальности соответствующего системе (1) уравнения КФП, соотношения (2) могут быть использованы для нахождения наиболее вероятных характеристик случайных колебаний и в общем случае, поскольку они получены без учета условий (2).

Литература

1. To C. W. S. *Nonlinear random vibration. Analytical techniques and applications.* CRC Press, 2012.

2. Landa P. S. *Regular and Chaotic Oscillations.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.

3. Рубаник В. П. *Влияние запаздываний в связях на интенсивность шумов в сложных автогенераторах* // Радиофизика. 1987. Т. 30. № 10. С. 1208–1212.

4. Жогаль С. П. *Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений* // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 1 (30). С. 37–41.

5. Вентцель Е. С. *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.* М.: Наука, 1991.