# К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

**В.Н. Лаптинский**

Рассматривается система уравнений

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u_x|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad u_x|_{y=\delta(x)} = U(x). \tag{3}$$

Соотношения (1)–(3)представляют собой задачу Прандтля для динамического турбулентного пограничного слоя конечной толщины $\delta(x)$ в случае плоского несжимаемого течения жидкости [1, с. 521; 2, с. 368], при этом в полном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ используется формула Прандтля [1, с. 524; 2, с. 97] для турбулентного напряжения трения $\tau_t = \rho\kappa^2 y^2 |(\partial u_x/\partial y)|(\partial u_x/\partial y)$, $\tau_l$ – ламинарная составляющая; знак усреднения скорости опущен. Искомыми являются функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение.

Основные обозначения:

$$\varphi = \int\limits_0^1 f(s)(1 - sf(s))\,ds - \frac{1}{2}\Bigl(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\Bigr)^2, \qquad = \frac{1}{2}\Bigl(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\Bigr)^2 - \int\limits_0^1 (1-s)f^2(s)\,ds,$$

$$a = \frac{1}{2}\Bigl(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\Bigr)^2 - 2\int\limits_0^1 (1-s)f^2(s)\,ds + \frac{1}{2},$$

$$b = \int\limits_0^1 f(s)(1 - 2sf(s))\,ds - \frac{1}{2}\Bigl(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\Bigr)^2 + \frac{1}{2},$$

где $f(s)$ – редуцированная форма безразмерной вспомогательной функции $\psi(x, y)$ [3]; при решении прикладных задач аэро- и гидродинамики, теплофизики в (1)–(3) могут быть использованы полуэмпирические приближения для $f(s)$, (см., например, [1, с. 604]); в ламинарном случае достаточно эффективными являются известные соотношения для закона распределения скорости [1, с. 197]. В работе [4] в выражении для $\psi$ допущена очевидная опечатка во втором слагаемом. Введенные величины связаны с фундаментальными величинами $\delta_1(x) = \alpha_2\delta(x)$, $\delta_2(x) = \alpha_1\delta(x)$ [1, с. 137, 194] классической теории пограничного слоя посредством равенств

$$\varphi + \psi = \alpha_1, \quad a + b = 2\alpha_1 + \alpha_2.$$

В инженерных расчетах преимущественное применение получили методы, основанные не на уравнениях Прандтля (1), (2), а на интегральных соотношениях, которые можно получить или специальными преобразованиями этих уравнений, или путем непосредственного применения к пограничному слою законов сохранения количества движения и сохранения энергии [2, с. 338]. Однако эти соотношения не являются замкнутыми [2, с. 340; 5, с. 352].

В [6] предложен аналитический дифференциальный метод решения задачи (1)–(3), основанный на использовании приближений вспомогательной функции $\psi(x,y)$, получаемой по разработанному алгоритму. Интегральным методом [3] в [4] получено полное решение задачи в случае ламинарного течения: точные формулы для вычисления $\delta(x)$, $\tau_0(x)$.

В случае турбулентного течения в [7] с помощью метода [3] получено замкнутое соотношение для вычисления $\delta(x)$:

$$\frac{d\delta^2(x)}{dx} + \frac{2b}{\varphi}\frac{U'(x)}{U(x)}\delta^2(x) - J\delta(x) - \frac{2\nu}{\varphi U(x)} = 0, \tag{4}$$

где $U'(x) = dU(x)/dx$, $J = J[f,\kappa]$ – нелинейный интегральный функционал, определяемый на основе формулы Прандтля для турбулентного напряжения $\tau_t$; $\kappa$ – безразмерный параметр, значения которого определяются по полуэмпирическим методикам [1, с. 532; 8, с. 103, 111].

Соотношение (4) представляет собой уравнение Абеля второго рода относительно $\delta(x)$. В случае ламинарного течения в [4] получено замкнутое аналитическое выражение для $\delta(x)$, $\delta(0) = 0$:

$$\delta^2(x) = \frac{2\nu}{\varphi}(U(x))^{-k}\int_0^x (U(s))^{k-1}\,ds, \tag{5}$$

где $k = 2b/\varphi$. В случае $U = \mathrm{const}$ из (5) следует соответствующая формула, приведенная в [3].

Более обозримым и удобным для анализа является интегральное уравнение, вытекающее из (4),

$$z(x) = \int_0^x K(x,s)[Jz^{1/2}(s) + g(s)]\,ds, \tag{6}$$

где $z(x) = \delta^2(x)$, $K(x,s) = (U(s)/U(x))^m$, $g(s) = 2\nu/\varphi U(s)$. В случае $U = \mathrm{const}$ функция $\delta(x)$ дается соотношением

$$\delta(x) = \frac{J}{2}x + \frac{g}{J}\ln\left(1 + \frac{J}{g}\delta(x)\right),$$

получаемым из (6).

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [3, 4, 6, 7], получено замкнутое (в рамках гипотезы Прандтля о структуре $\tau_t$) соотношение для касательного напряжения $\tau_0(x)$:

$$\tau_0(x) = \left(1 + \frac{}{\varphi}\right)\frac{\mu U}{\delta} + \left(a - \frac{b\psi}{\varphi}\right)\rho U U'\delta + \left(1 + \frac{}{\varphi}\right)\kappa^2 J_0[f]\rho U^2, \tag{7}$$

где $J_0[f]$ – модификация функционала $J[f,\kappa] = (2\kappa^2/\varphi)J_0[f]$.

В случае ламинарного течения из (7) следует соответствующее выражение [4] для $\tau_0(x)$.

### Литература


1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.
2. Емцев Б. Т. *Техническая гидромеханика.* М.: Машиностроение, 1987.
3. Лаптинский В. Н. *Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // Уч. записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 5. С. 72–93.
4. Лаптинский В. Н. *К решению задачи о динамическом ламинарном пограничном слое* // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2017»: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 16–20 мая 2017 г. Мн., 2017. Ч. 2. С. 43.
5. Авдуевский В. С., Галицейский Г. А. и др. *Основы теплопередачи в авиционной и ракетно-космической технике.* М.: Машиностроение, 1974.
6. Лаптинский В. Н. *Конструктивный метод анализа задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Международная научно-практическая конференция, посвященная 100-летию МГУ им. А.А. Кулешова «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания»: сб. науч. статей Междунар. науч.-практ. конф., Могилев, 20–22 февраля 2013 г. Могилев, 2013. С. 86–89.
7. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче Прандтля* // 9-й междунар. семинар «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ–2018)»: Тез. докл., Минск, 17–21 сентября 2018 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2018. С. 49–50.
8. Кутателадзе С. С. *Основы теории теплообмена.* М.: Атомиздат, 1979.