ПОСТРОЕНИЕ СЕЛЕКТОРОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

А.А. Леваков

Пусть X – сепарабельное гильбертово пространство; $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$; μ – мера Лебега на отрезке $[0, a]$; $\Lambda([0, a])$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств из $[0, a]$; $\beta([0, a])$ – борелевская σ-алгебра на $[0, a]$; $\mathcal{P}(X)$ – множество всех непустых подмножеств из X; $\mathcal{P}_{cc}(X)$ – множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств из X. Если $\widetilde{\mu}$ – мера на $[0, a] \times \Omega$ такая, что $\widetilde{\mu}(A \times B) = \mu(A) \times P(B)$ $\forall A \in \Lambda([0, a])$, $B \in \mathcal{F}$, то через $\mu \times P$ обозначаем лебеговское продолжение меры $\widetilde{\mu}$, а через Π – σ-алгебру $(\mu \times P)$-измеримых подмножеств из $[0, a] \times \Omega$, и через $\beta([0, a]) \times \mathcal{F}$ – σ-алгебру, порожденную множествами $A \times B$, $A \in \beta([0, a])$, $B \in \mathcal{F}$. Многозначное отображение $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}(X)$ называем Π-измеримым $((\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$-измеримым), если для любого открытого множества $D \subset X$ имеем

$$\{(t, \omega) : F(t, \omega) \bigcap D \neq \varnothing\} \subset \Pi \quad (\{(t, \omega) : F(t, \omega) \bigcap D \neq \varnothing\} \subset \beta([0, a]) \times \mathcal{F}.$$

Ясно, что $(\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$-измеримое отображение является Π-измеримым.

Многозначное отображение $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}(X)$ называем $(\mathcal{F}_t)$-согласованным, если при каждом $\bar{t} \in [0, a]$ отображение $F(\bar{t}, \omega)$ – $(\mathcal{F}_{\bar{t}})$-измеримо.

Многозначное отображение называем прогресивно измеримым, если для каждого $t \in [0, a]$ $\{(s, \omega) : s \leqslant t, F(s, \omega) \bigcap D \neq \varnothing\} \subset \beta([0, t]) \times \mathcal{F}_t$, где $\beta([0, t])$ – борелевская σ-алгебра на $[0, t]$.

Многозначное отображение $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}(X)$ называем интегрально ограниченным, если существует интегрируемая по Лебегу функция $\lambda : [0, a] \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ такая, что $F(t, \omega) \subset B(0, \lambda(t))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in [0, a] \times \Omega$, где $B(0, \lambda(t)) = \{x \in X : \|x\| \leqslant \lambda(t)\}$.

Через $L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times P, \Pi, X)$ обозначаем банахово пространство Π-измеримых интегрируемых по Бохнеру отображений $h : [0, a] \times \Omega \to X$ (точнее классов эквивалентности таких отображений) с нормой $\|h\| = \int_{[0,a]\times\Omega} \|h(t, \omega)\| \, d(\mu \times P) < +\infty$.

Отображение $f : [0, a] \times \Omega \to X$ называем селектором многозначного отображения $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}(X)$, если $f(t, \omega) \in F(t, \omega)$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in [0, a] \times \Omega$.

Предложение 1. *Пусть $f_n(t, \omega)$ – интегрально ограниченная последовательность функций из $L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times P, \Pi, X)$. Тогда последовательность $f_n(t, \omega)$ относительно слабо компактна в $L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times P, \Pi, X)$ и, если $g(t, \omega)$ – ее слабый предел, то для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in [0, a] \times \Omega$ имеет место включение $g(t, \omega) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{j=m}^{\infty} f_j(t, \omega)$.*

Согласно предложению 1 каждый слабый предел $g(t, \omega)$ интегрально ограниченной последовательности селекторов $f_n(t, \omega) \in L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times P, \Pi, X)$ многозначного отображения $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}_{cc}(X)$ удовлетворяет включению $g(t, \omega) \in F(t, \omega)$ для $(\mu \times P)$-почти всех (t, ω).

Предложение 2. *Для любой функции $g(t, \omega) \in L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times P, \Pi, X)$ существует $(\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$-измеримая функция $h(t, \omega)$ такая, что $g(t, \omega) = h(t, \omega)$ для $\mu \times P)$-почти всех (t, ω).*

Пусть $E(h|\mathcal{F}_t)$ – условные математические ожидания отображения $h(t, \omega)$ относительно потока $\mathcal{F}_t$. Согласно теореме Ондрежата условные математические ожидания $E(h|\mathcal{F}_t) = x(t, \omega)$ могут быть выбраны так, что отображение $x(t, \omega)$ прогрессивно измеримо.

Предложение 3. *Пусть* $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}_{cc}(X)$ – $(\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$*-измеримое* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованное многозначное отображение,* $h(t, \omega)$ – $(\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$*-измеримый селектор отображения* F, $E(h|\mathcal{F}_t)$ – *прогрессивно измеримое отображение, образованное условными математическими ожиданиями. Тогда для* $(\mu \times P)$*-почти всех* $(t, \omega) \in$ $\in [0, a] \times \Omega$ *выполняется включение* $E(h|\mathcal{F}_t) \in F(t, \omega)$.

Теорема. *Пусть* $F : [0, a] \times \Omega \to \mathcal{P}_{cc}(X)$ – $(\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$*-измеримое* $(\mathcal{F}_t)$*-согласованное многозначное отображение,* $f_n(t, \omega) \in L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times P, \Pi, X)$ – *интегрально ограниченная последовательность селекторов отображения* F. *Тогда существует подпоследовательность последовательности* f_n *слабо сходящаяся в* $L_1([0, a] \times \Omega, \mu \times$ $\times P, \Pi, X)$ *к* $(\beta([0, a]) \times \mathcal{F})$*-измеримому отображению* h, *для которого условные математические ожидания* $E(h|\mathcal{F}_t) = x(t, \omega)$ *можно выбрать так, что отображение* x *является прогрессивно измеримым селектором для многозначного отображения* F.

Прогрессивно измеримый селектор x из теоремы используется при построении общей теории стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями в гильбертовом пространстве.