СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ ДАРВИНА–КОКСА ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Е.М. Овсиюк, А.Д. Коральков, Я.А. Войнова

Обобщенное уравнение Шредингера для частицы со структурой Дарвина–Кокса, учитывающее распределение заряда частицы по сфере конечного радиуса, исследуется с учетом внешнего кулоновского поля. Проведено разделение переменных, полученное радиальное уравнение существенно сложнее уравнения в случае обычной частицы, оно имеет существенно особые точки $r = 0$ ранга 3, $r = \infty$ ранга 2 и 4 регулярные особые точки. Построены решения Фробениуса найденных радиальных уравнений, исследована структура рекуррентных соотношений для коэффициентов возникающих степенных рядов (они оказываются соотвественно 7-членными и 8-членными).

Численный анализ поведения обобщенных импульсов для найденных уравнений показывает существование областей значений энергии, момента и параметра Кокса, последний связан с размером области распределения заряда, для которых возможно существование связанных состояний частицы.

Опуская технические детали, касающиеся общей структуры обобщенного уравнения Шредингера для частицы Дарвина–Кокса [1, 2], и вычисления, связанные с разделением переменных на основе стандартной подстановки для волновой функции $\Psi = e^{-iEt/\hbar}Y_{lm}(\theta,\phi)R(r)$, начнем с явного вида получаемого в результате радиального уравнения $(l = 0, 1, 2, \dots)$:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left[-\frac{4x^3}{x^4+\Gamma^2} + \frac{6}{x}\right]\frac{dR}{dx} + \left[2\varepsilon + \frac{2\alpha}{x} - \frac{l\,(l+1)}{x^2} + \frac{4\Gamma}{x^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma^2\,(2\varepsilon-1)}{x^4} + \frac{2\alpha\Gamma^2}{x^5} - \frac{\Gamma^2 l\,(l+1)}{x^6} - \frac{4x\Gamma}{x^4+\Gamma^2}\right]R = 0, \qquad (1)$$

здесь все величины безразмерные (Γ – параметр Кокса):

$$\varepsilon = \frac{E}{mc^2}, \quad r\frac{mc}{\hbar} = x, \quad \frac{1}{mc^2}\frac{e^2}{r} = \frac{\alpha}{x}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad \gamma\frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \Gamma.$$

В (1) имеем уравнение с четырьмя регулярными особыми точками:

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{e^{+i\pi/4}\sqrt{\Gamma}, -e^{+i\pi/4}\sqrt{\Gamma}, e^{-i\pi/4}\sqrt{\Gamma}, -e^{-i\pi/4}\sqrt{\Gamma}\}$$

и двумя нерегулярными точками (ограничимся значениями $l = 1, 2, \dots$) : $x = 0$, $\mathrm{Rang} = 3$, $x = \infty$, $\mathrm{Rang} = 2$. Около регулярных особых точек решения имеют простой вид

$$r \to +\sigma, \quad R \sim (r-\sigma)^\rho, \quad \rho = 0, 2, \quad r \to -\sigma, \quad R \sim (r+\sigma)^\rho, \quad \rho = 0, 2;$$
$$r \to +i\sigma, \quad R \sim (r-i\sigma)^\rho, \quad \rho = 0, 2; \quad r \to -i\sigma, \quad R \sim (r+i\sigma)^\rho, \quad \rho = 0, 2. \qquad (2)$$

Решения Фробениуса уравнения (1) строим в виде $R(r) = e^{Ax}x^C e^{B/x}e^{D/x^2}f(r)$. Чтобы описывать связанные состояния, для коэффициентов должны выбирать следующие значения (пусть $L = \sqrt{l(l+1)}$, $\varepsilon < 0$):

$$A = -\sqrt{-2\varepsilon}, \quad D = -\frac{\Gamma L}{2}, \quad B = \frac{\alpha\Gamma}{L}, \quad C = -\frac{3}{2} - \Gamma\frac{\alpha^2/L^2 - 1 + 2\varepsilon}{2L},$$

следим за положительными и отрицательными значениями величины Γ. Кратко структуру уравнения для $f(x)$ можно представить следующим образом:

$$f'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} - \frac{4x^3}{x^4+\Gamma^2}\right)f' + \left(\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \frac{c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0}{x^4+\Gamma^2}\right)f = 0.$$

Строим его решения в виде степенных рядов, приходим к 8-членным рекуррентным соотношениям. Исследуем сходимость ряда по методу Пуанкаре–Перрона, возможны следующие радиусы сходимости: $R_{\text{conv}} = +\infty,\ |\Gamma|$. Поскольку на границе круга радиусом $|\Gamma|$ поведение решений вполне регулярное (2), нас интересует сходимость ряда только в положительной области вещественной переменной x, то можно полагать, что степенной ряд сходится во всей области от нуля до бесконечности.

Можно легко убедиться в том, что оставаясь в физической области значений параметра энергии – вещественных и отрицательных значений, близких к нулю ($\varepsilon < 0$, $\varepsilon > -5\cdot 10^{-6}$; эту область легко установить, анализируя случай обычной частицы при $\Gamma = 0$), невозможно построить точных решений. К сожалению, другие аналитические правила квантования не известны. Попытка выделить среди точных решений Фробениуса некоторые нужные значения энергии, вводя малые добавки к невозмущенным уровням энергии при $\Gamma = 0$ дала немного: мы устойчиво получаем решения либо без нулей (такие решения могут соответствовать основному связанному состоянию) либо только с одним нулем.

Можно выполнить качественный анализ дифференциального уравнения. Для этого возвратимся к уравнению (1) и исключим в нем член с первой производной

$$R = \varphi\bar{R}, \quad \varphi(x) = \frac{\sqrt{x^4+\Gamma^2}}{x^3}.$$

Тогда уравнение для $\bar{R}$ примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\bar{R} + \left[2\varepsilon + \frac{2\alpha}{x} - \frac{l(l+1)+6}{x^2} + \frac{4\Gamma}{x^3} + \frac{\Gamma^2(2\varepsilon-1)}{x^4} + \frac{2\alpha\Gamma^2}{x^5} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma^2 l(l+1)}{x^6} - \frac{4x\Gamma - 18x^2}{x^4+\Gamma^2} - \frac{12x^6}{(x^4+\Gamma^2)^2}\right]\bar{R} = 0,$$

или кратко с использованием эффективного квадрата импульса

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + P^2(x)\right)\bar{R} = 0,$$

где функция $P^2(x)$ – эффективный квадрат импульса. Его асимптотики около двух физических особенностей следующие:

$$x \to 0, \quad P^2(x) \approx -\frac{\Gamma^2 l(l+1)}{x^6} \to -\infty; \quad x \to \infty, \quad P^2(x) \approx 2\varepsilon + \frac{2\alpha}{x} + \ldots > 2\varepsilon.$$

Численный анализ поведения кривой $P^2(x)$ для физического интервала значений энергии (при фиксированом l) показывает, что в широком интервале значений параметра Кокса $\gamma \sim 10^{-8} - 10^{-2}$ кривая $P^2(x)$ имеет две точки пересечения $x_2 > x_1 > 0$ с осью x и один положительный локальный максимум внутри интервала $[x_1, x_2]$. Это характерно для квантово-механических задач с потенциальной ямой и дискретным спектром энергий. Главный вопрос – какое условие может обеспечить нужное правило квантования для энергий.

Литература

1. Cox W. *Higher-rank representations for zero-spin field theories* // J. Phys. Math. Gen. 1982. V. 15. P. 627–635.

2. Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Voynova Y. A., Balan V., Red'kov V. M. *Elementary Particles with Internal Structure in External Fields V. II. Physical Problems.* New York: Nova Science Publishers Inc., 2018.