

## УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ РАССЕЛЕНИЯ ПОПУЛЯЦИЙ НАСЕКОМЫХ

А.Ю. Переварюха

В докладе рассматривается проблема моделирования инвазионной активности в процессе расселения нежелательных видов в уязвимой экосистеме. Такие виды вредителей обладают высокой репродуктивной активностью, соответственно большим мальтузианским  $r$ -параметром. Плодовитость не компенсируется на первых этапах развития инвазии и вселенец переходит к фазе стремительной вспышке. Эруптивная фаза взрывообразного роста завершается новым состоянием экосистемы. Новое положение зависит от многих факторов взаимной адаптации автохтонной и чужеродной биоты и активации биологического фактора сопротивления среды с запаздыванием.

Наиболее специфичен вариант успешного адаптационного прохождения неблагоприятного малочисленного состояния, вызванного активным противодействием со стороны факторов среды и биологического окружения. Обосновано, что необходимо различать регуляционное и адаптационное запаздывание  $\tau$  и  $\psi$  в биосистемах, последнее связано с временем реакции для выработки защитных мер, как в известном примере с бактериями и бактериофагом.

Традиционные модели описывают стабилизацию, затухающие и устойчивые циклические колебания. В реальность после вспышки может происходить резкий коллапс, прохождения стадии бутылочного горлышка с относительным восстановлением численности. Активный вселенец может полностью исчезнуть после серийной вспышки. В наших исследованиях мы рассматриваем сценарии экстремальной и нестационарной популяционной динамики насекомых-фитофагов на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Модель Хатчинсона имеет недостаток быстрого снижения минимумов релаксационного цикла при увеличении репродуктивного  $r$  параметра с большой амплитудой. Модель Никольсона

$$\dot{N} = rN(t-h)e^{-\gamma N(t-h)} - \psi N(t)$$

быстро переходит в режим хаотических колебаний. Такие колебания у околонулевых значений теряют биологическую интерпретацию. Модификацию популяционного уравнения Гополсами, позволяющую проводить настройку характеристик негармонических колебаний

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( \frac{K - N(t-\tau)}{(K + cN(t-\tau))} \right). \quad (1)$$

Можно рассматривать с приведенными коэффициентами

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t-1)),$$

где  $f$  – бесконечно дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд  $f(x) = (1-x)/(1+cx)$ . Для (1) установлено существование единственного устойчивого релаксационного цикла неклассической формы. В модификации коэффициент  $c > 0$  становится еще одним параметром, определяющим характеристики цикла, при увеличении  $c$  демпфируется амплитуда, но проблемное свойство  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r\tau) \rightarrow 0$  сохраняется. Можно считать такие уравнения моделями со смешанной регуляцией при наличии в уравнении  $-N(t)N(t-\tau)$ .



Модификацию перехода быстро размножающейся инвазивной популяции в состоянии длительной депрессии можно предложить с использованием функции  $v(N) = \ln(K/N)$ , но с регуляцией от  $N(t - \tau)$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \frac{K}{N(t - \tau)} \right) \sqrt[3]{(N(t - \tau_1) - L)},$$

Но в данном варианте параметрический диапазон существования вида слишком узок. Модель будем модифицировать применительно к специфическим экологическим сценариям развития инвазии. При дополнении сомножителем  $N^3 \overline{(N - L)}$  внешним независимым изъятием, описывающим запаздывающее сопротивление среды  $-\psi N(t - h)$ ,  $< \tau$ :

$$\frac{dN}{dt} = r \ln \left( \frac{K}{N(t - \tau)} \right) N \sqrt[3]{(N - L)} - \xi N(t - \psi). \quad (2)$$

В модели (2) можно получить сценарий полного уничтожения популяции агрессивного вселенца после разрушительной вспышки, либо превращения инвазивного агента в реликтовый вид, в зависимости от значения параметра изъятия  $\xi$ .

Для описания экзотического сценария колебательной всплывочной активности предложим модификацию уравнения, где наблюдаем разрушение возникших после бифуркации колебаний с образованием неограниченной траектории:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{\mathfrak{K}} \right) (\mathcal{U} - N(t - \tau)).$$

Вычислительный эксперимент после разрушения цикла завершается сообщением об ошибках переполнения среды моделирования. Сценарий может означать демографический коллапс инвазивного вида, хотя данный вариант поведения траектории интересен как иллюстрация катастрофической формы бифуркации Андронова-Хопфа.

В дальнейших усложнениях модификации модели с  $F(N(t - \tau_1))(\mathcal{U} - N(t - \tau)) \times e^{-\kappa N(t - \tau_1)}$  с логарифмической и экспоненциальной регуляцией с запаздыванием принципиально новых интересных вариантов решения не наблюдается:

$$\frac{dN}{dt} = N(t)r \ln \left( \frac{\mathfrak{K}}{N(t - \tau)} \right) e^{-\kappa N(t - \tau_1)} - QN(t - \psi).$$

Модификацию можно использовать для получения нетривиальных и аperiodических колебаний без глубоких минимумов. Сложные релаксационные колебания и траектории-утки можно получить и в ряде других известных моделей. Очень важно при разработке новых версий подобных уравнений – подобрать адекватное биологическое истолкования для поведения траектории.

В работе рассмотрены модификации популяционных моделей для сценариев, где новый вид с большим репродуктивным потенциалом не просто занимает экологическую нишу или приводит к ситуации с регулярными колебаниями, но проходит ряд специфических переходных режимов. Вычислительным сценариям дана биологическая интерпретация. Получен сценарий стремительного сокращения численности активного вселенца до минимально допустимой, но при этом стабильной численности локальной группы особей. Другой модельный сценарий при исследовании уравнений описывает режим единичной и повторяй вспышки численности, где вторая вспышка становится фатальной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-07-00125).

#### Литература

1. Sun M. *Analysis of stability and Hopf bifurcation for a delayed logistic equation* // Chaos, Solitons, Fractals. 2007. V. 31. № 1. P. 672–682.
2. Perevaryukha A. Y. *A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics* // Entomological Rev. 2015. V. 95. № 3. P. 397–405.