К ПРОБЛЕМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Г.П. Размыслович, А.В. Филипцов

Как известно [1], одним из методов решения линейного стационарного векторного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с действительной матрицей A является матричный метод, при котором фундаментальная матрица находится в виде матричной экспоненты e^{At}. Ее вычисление в виде $Se^{Jt}S^{-1}$, где J – жорданова нормальная форма матрицы A, а S – матрица, трансформирующая матрицу A в матрицу J, удобно использовать в случае, когда кратности собственных значений матрицы A малы, в частности, когда матрица A имеет n различных собственных значений. Если же различных собственных значений значительно меньше, чем порядок матрицы A, и, следовательно, их кратности велики, то построение матриц S и J может вызвать определенные вычислительные сложности. В этом случае, наряду с численными методами решение этой проблемы (см., например, [2]) предлагается аналитический метод, основанный на свойствах корневых подпространств матрицы A.

Пусть характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ матрицы A имеет вид

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \ldots + n_k = n, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j.$$

Согласно [3, 4] множество решений матричного уравнения $(A - \lambda_i E)^{n_i} X = 0$, где X – матрица–столбец, является корневым подпространством матрицы A, соответствующим собственному значению λ_i, и имеет размерность n_i. Следовательно, базис пространства решений этого уравнения состоит из n_i столбцов, и для матрицы V_i, составленной из этих столбцов, справедливы равенства $(A - \lambda_i E)^p V_i = 0$, $\forall p \geqslant n_i$. Отсюда имеем,

$$e^{At} V_i = e^{\lambda_i t} e^{(A - \lambda_i E)t} V_i = e^{\lambda_i t} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda_i E)^s t^s}{s!} \right) V_i =$$

$$= e^{\lambda_i t} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(A - \lambda_i E)^s t^s V_i}{s!} \right) = e^{\lambda_i t} \left(\sum_{s=0}^{n_i - 1} \frac{(A - \lambda_i E)^s t^s V_i}{s!} \right).$$

Так как матрица $V = [V_1, \ldots, V_k]$ – невырожденная, то, построив матрицу $W(t) = [e^{At} V_1, \ldots, e^{At} V_k] = e^{At} V$, получим $e^{At} = W(t) V^{-1}$.

Заметим, что при решении уравнения (1) не всегда требуется поиск обратной матрицы V^{-1}. Например, если матрица A имеет лишь одно собственное значение, то в качестве матрицы V может выступать единичная матрица. Кроме того, если матрица A имеет лишь действительные собственные значения, то матрица V – действительная, и следовательно, матрица $W(t)$ также является фундаментальной матрицей уравнения (1).

Литература

1. Богданов Ю. С., Мазаник С. А., Сыроид Ю. Б. *Курс дифференциальных уравнений.* Мн.: Университетское, 1996.

2. Размыслович Г. П., Филипцов А. В. *О вычислении фундаментальной матрицы линейного векторного уравнения* // Материалы XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2018». Гродно, 2018. С. 145–146.

3. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1988.

4. Размыслович Г. П., Филипцов А. В., Ширяев В. М. *Геометрия и алгебра. Практикум.* Мн.: Вышэйшая школа, 2018.