АППРОКСИМАТИВНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Как известно, система дифференциальных уравнений, описывающая кеплеровское движение двух тел в прямоугольных декартовых координатах с центром в точке с массой m_0 имеет следующий вид [1, с. 434]:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mu = f\,(m_0 + m_1)$, m_0, m_1 – массы гравитирующих тел, f – гравитационная постоянная.

Трудность непосредственного решения уравнений системы (1) вызывает наличие кубической нелинейности по r в знаменателях правых частей уравнений системы. Основная идея работы заключается в преодолении данной трудности путем аппроксимации функции $1/r^3$ полиномом

$$1/r^3 \approx c_0 + c_1 r^2 \quad (0 < a \leqslant r \leqslant b) \tag{2}$$

наилучшего приближения в чебышевской метрике с последующим приведением левой части уравнений системы к линейному виду.

Для нахождения коэффициентов данного экстремального полинома воспользуемся следующей теоремой [2].

Теорема. *Пусть для непрерывно дифференцируемых функций выполнены следующие условия:*

1) $\varphi'(x) > 0 \quad (x \in (a, b))$;

2) на интервале (a, b) *функция* $f'(x)/\varphi'(x)$ *строго возрастает.*

Тогда коэффициенты экстремального полинома $P_1^*(x) = c_0^* + c_1^* \varphi(x)$ *находятся по следующим формулам:*

$$c_0 = \frac{1}{2\,[\varphi(b) - \varphi(a)]}\left\{[\varphi(x_2^*) + \varphi(b)]f(a) - [\varphi(a) + \varphi(x_2^*)]\,f(b)\right\} + \frac{1}{2} f(x_2^*),$$

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)},$$

где x_2^* *– единственный корень уравнения*

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

В нашем случае $f(r) = 1/r^3$, $\varphi(r) = r^2$. Тогда находим

$$r_2 = \sqrt[5]{\frac{3\,(a+b)\,a^3 b^3}{2\,(a^2 + ab + b^2)}}, \quad c_1 = -\frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)\,a^3 b^3}, \quad c_0 = \frac{1}{2\,(b^2 - a^2)}\left[\frac{b^2 + r_2^2}{a^3} - \frac{a^2 + r_2^2}{b^3}\right] + \frac{1}{2 r_2^3}.$$

В частности, предлагаемую идею аппроксимации функции $1/r^3$ экстремальным полиномом вида (2) можно использовать для решения следующей системы уравнений:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3} + f_1(t), \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3} + f_2(t), \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} + f_3(t), \tag{3}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f_3(t)$ – T-периодические функции, например, описывающие работу двигателя космического аппарата.

С учетом аппроксимации (2) система (3) примет вид

$$\ddot{x}(t) = -\mu c_1 x(t)\left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) - \mu c_0 x(t) + f_1(t),$$
$$\ddot{y}(t) = -\mu c_1 y(t)\left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) - \mu c_0 y(t) + f_2(t),$$
$$\ddot{z}(t) = -\mu c_1 z(t)\left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) - \mu c_0 z(t) + f_3(t),$$

или эквивалентный вид

$$\ddot{x}(t) - hx(t) = -\mu c_1 x(t)\left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) - \mu c_0 x(t) - hx(t) + f_1(t),$$
$$\ddot{y}(t) - hy(t) = -\mu c_1 y(t)\left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) - \mu c_0 y(t) - hy(t) + f_2(t),$$
$$\ddot{z}(t) - hz(t) = -\mu c_1 z(t)\left(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)\right) - \mu c_0 z(t) - hz(t) + f_3(t).$$

Решение данной T-периодической краевой задачи имеет представление

$$x(t) = \int_0^T G(s)\left[-\mu c_1 x(t-s) r^2(t-s) - \mu c_0 x(t-s) - hx(t-s) + f_1(t-s)\right] ds,$$

$$y(t) = \int_0^T G(s)\left[-\mu c_1 y(t-s) r^2(t-s) - \mu c_0 y(t-s) - hy(t-s) + f_2(t-s)\right] ds,$$

$$z(t) = \int_0^T G(s)\left[-\mu c_1 z(t-s) r^2(t-s) - \mu c_0 z(t-s) - hz(t-s) + f_3(t-s)\right] ds,$$

в котором $r^2(t-s) = x^2(t-s) + y^2(t-s) + z^2(t-s)$, функция Грина

$$G(s) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} - \frac{e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}}\right),$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{h}$ – корни характеристического уравнения из левой части уравнений последней системы.

Литература

1. Дубошин Г. Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы.* М.: Наука, 1975.

2. Сунь Байюй. *О точном нахождении экстремальных полиномов на двумерном подпространстве* // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. 2014. № 2(80). С. 34–38.