ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

М.М. Чуйко, О.М. Королёва

Построен вычислительный алгоритм для математического моделирования конвективных течений в двумерных областях произвольной формы. Процессы тепло- и массопереноса вязкой несжимаемой жидкости в односвязной области Ω_{xy} описываются в приближении Буссинеска следующими уравнениями:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+C(\mathbf{v})T\right)=\lambda\Delta T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+C(\mathbf{v})\mathbf{v}-\nu\Delta\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\mathbf{g}\beta_T T,\quad \mathrm{div}\mathbf{v}=0,\quad (x,y)\in\Omega_{xy},\quad t>0. \tag{2}$$

На границе $\partial\Omega_{xy}$ области задаются тепловые потоки и условия прилипания $\mathbf{v}=0$.

При решении задач в произвольных областях используются обобщенные криволинейные координаты [1]. Пусть преобразование $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ отображает область Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta}=\{(\xi,\eta):0\leqslant\xi,\eta\leqslant 1\}$. В пространстве обобщенных криволинейных координат (ξ,η) задача (1), (2) имеет следующий вид:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+C_{\xi\eta}(\mathbf{v})T\right)=\lambda\Delta_{\xi\eta}T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v}-\nu\Delta_{\xi\eta}\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}_{\xi\eta}p+\mathbf{g}\beta_T T, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}_{\xi\eta}\mathbf{v}=0,\quad (\xi,\eta)\in\Omega_{\xi\eta},\quad 0<t\leqslant t_0, \tag{5}$$

где

$$\mathrm{div}_{\xi\eta}\mathbf{v}=\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}u\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}u\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}v\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}v\right)\right],$$

$$\mathrm{grad}_{\xi\eta}p=\frac{1}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta},-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial p}{\partial\eta}\right),$$

$$C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v}=\frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}_{\xi\eta}\right)\mathbf{v}+\mathrm{div}_{\xi\eta}(\mathbf{v}\mathbf{v})\right),$$

$$\Delta_{\xi\eta}u=\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_{12}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B_{12}\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_{22}\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right].$$

Здесь J – якобиан обратного преобразования $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$, B_{11},B_{12},B_{22} – метрические коэффициенты.

На равномерной прямоугольной разностной сетке, введенной в области $\Omega_{\xi\eta}$, построены разностные схемы, аппроксимирующие задачу (3)–(5). Для определения поля скоростей и давлений использовался метод расчета течений несжимаемой жидкости на неразнесенных сетках [2]. Полученные системы девятиточечных разностных уравнений решались с помощью метода MSIM [3].

Литература

1. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей.* Т. 2. М.: Мир, 1991.

2. Chuiko M., Lapanik A. *Incompressible fluid flow computation in arbitrary two-dimensional region on nonstaggered grids* // Comput. Meth. Appl. Math. 2005. № 3. P. 242–258.

3. Schneider G., Zedan M. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem* // Numer. Heat Transf. 1981. V. 4. P. 1–19.