ЭКРАНИРОВАНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ТОНКОЙ НЕЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ПРИСУТСТВИИ ТОРА

Г.Ч. Шушкевич

Пусть в неограниченном однородном и изотропном пространстве $\mathbb{R}^3$ на расстоянии h друг от друга находятся идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка S и идеально проводящее тело D, ограниченное тороидальной поверхностью T с расстоянием R от центра образующей окружности до оси вращения Oz_1 и с радиусом r образующей окружности, $R > r$. Оболочка S расположена на поверхности сферы S_1 радиуса a с центром в точке O. Сфера S_1 и тороидальная поверхность T имеют общую ось вращения. Область пространства, ограниченную поверхностью сферы S_1, обозначим через D_0, тогда область $D_1 = \mathbb{R}^3 \backslash (D_0 \bigcup S_1 \bigcup D \bigcup T)$. В точке O расположен источник электростатического поля – электростатический диполь, момент которого направлен вдоль оси Oz.

Для решения задачи с точкой O свяжем сферические координаты, а с точкой O_1 – тороидальные координаты [1]. Тогда поверхности S и T будут описываться следующим образом:

$$S = \{r = a, \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\},$$

$$T = \{\alpha = \alpha_0 = \ln(R/r + \sqrt{(R/r)^2 - 1}), \quad -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\}.$$

Обозначим через U_d потенциал электростатического поля диполя, через U_j – потенциал вторичного электростатического поля в области D_j, $j = 0, 1$.

Постановка задачи. Требуется найти вторичные потенциалы U_j, $j = 0, 1$, которые удовлетворяют:

1) уравнению Лапласа $\Delta U_j = 0$, где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

2) граничным условиям

$$(U_d(M) + U_0(M))|_{M \in S} = U_1(M)|_{M \in S} = 0, \quad U_1(M)|_{M \in T} = 0;$$

3) условию на бесконечности $U_1(M) \to 0$ при $M \to \infty$, где M – произвольная точка области D_1.

Кроме того, потребуем выполнения условий непрерывности потенциала на поверхности сферы S_1 и непрерывности поля на части поверхности сферы S_1, которая не является экраном [2, 3]:

$$U_d\left(r, \theta\right) + U_0\left(r, \theta\right) = U_1\left(r, \theta\right), \quad r = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(U_d\left(r, \theta\right) + U_0\left(r, \theta\right)\right) = \frac{\partial}{\partial r} U_1\left(r, \theta\right), \quad r = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0.$$

Потенциал электрического диполя представим в виде [4]

$$U_d(r, \theta) = P\frac{\cos\theta}{r^2} = P\frac{1}{r^2} P_1\left(\cos\theta\right),$$

где $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра, P – известная величина [4].

Согласно методу разделения переменных, решение поставленной граничной задачи будем искать в виде суперпозиции сферических и тороидальных гармонических функций так, чтобы автоматически выполнялось условие на бесконечности 3):

$$U_1 = U_1^{(0)}(r,\theta) + U_1^{(1)}(\alpha,\beta),$$

$$U_0(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \quad U_1^{(0)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta),$$

$$U_1^{(1)}(\alpha,\beta) = \sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, e^{in\beta},$$

где $P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)$ – функции тора, a_n, b_n, x_n – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Используя теоремы сложения, связывающие сферические и тороидальные гармонические функции в сдвинутой системе координат по оси Oz [5]

$$r^{-n-1}P_n(\cos\theta) = (2\pi)^{-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} R_n^s(c,h)\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)}Q_{s-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, e^{is\beta}, \quad \alpha > 0,$$

$$\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)}P_{n-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)\, e^{in\beta} = c\sum_{s=0}^{\infty} \overline{R_s^n(c,h)} r^s P_s(\cos\theta), \quad r < \sqrt{h^2+c^2},$$

$$R_n^s(c,h) = \frac{2}{v^{n+1}}P_n(h/v) + \sum_{k=1}^{s} (-c)^k \frac{f_k^s}{v^{n+k+1}} \left[sP_{n+k}^k(h/v) + ik(n+1)P_{n+k}^{k-1}(h/v) \right],$$

$$f_k^s = \frac{(-1)^k 2^{3k+1} k!(s+k-1)!}{((2k)!)^2 (s-k)!}, v = \sqrt{h^2-c^2}, \quad c = \sqrt{R^2-r^2}, \quad R_n^{-s}(c,h) = \overline{R_n^s(c,h)},$$

где $Q_{s-1/2}(\operatorname{ch}\alpha)$ – функции тора, $P_{n+k}^k(h/v)$ – функции Лежандра, и выполняя граничные условия, получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра. Парные уравнения преобразованы к интегральному уравнения Фредгольма второго рода относительно специальным образом введенной функции [3]. Выведена формула для вычисления вторичного потенциала в области D_1 через решение интегрального уравнения.

Разработанная методика может найти практическое применение при разработке и конструировании экранов в различных областях техники.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Ковергенция–2020» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»).

Литература

1. Shushkevich G.Ch. *Electrostatic field of a thin unclosed spherical shell and a torus* // Technical Physics. 1998. V. 46. № 7. P. 743–748.

2. Шушкевич Г.Ч. *Моделирование поля элекростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости* // Информатика. 2017. № 2. С. 14–23.

3. Shushkevich G.Ch. *Modeling fields in multiply connected regions in electrostatics problems.* Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015.

4. Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т. *Электромагнитные поля в экранирующих оболочках.* Мн.: Университетское, 1988.

5. Ерофеенко В.Т. *Теоремы сложения.* Мн.: Наука и техника, 1989.