МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Н.Г. Абрашина-Жадаева, Л.Л. Березкина

Дифференциальные уравнения занимают достаточно большое место в учебном процессе на физическом факультете и факультете радиофизики и компьютерных технологий [1–4]. Эта дисциплина читается для студентов младших курсов и существенным образом опирается на сведения из курса «Аналитической геометрии и линейной алгебры». В первую очередь следует сказать о нахождении собственных векторов линейных операторов и присоединенных к ним, которые применяются при решении систем линейных дифференциальных уравнений, как матричным методом, так и методом Эйлера. В этой связи, мы используем легко доказываемое утверждение, которое редко встречается в учебниках по линейной алгебре: если определитель матрицы однородной квадратной системы линейных уравнений

$$AX = 0 \tag{1}$$

равен нулю, то при любом $i = \overline{1, n}$ упорядоченный набор $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})$, где $(A_{ij}$ – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A, есть решение системы (1).

Это утверждение в случае, когда $\operatorname{rang}(A - \lambda E) = n - 1$, дает эффективный (а при $n = 3$ – устный) способ вычисления собственных векторов. При этом все собственные векторы коллинеарные и тогда достаточно найти любой из них, что мы и осуществляем по предложенной методике с помощью алгебраических дополнений.

Кроме того, при изложении теории линейных операторов внимание уделяется приложению теории к решению интегральных уравнений. Например, надо решить интегральное уравнение

$$y(x) + \int_1^e \left(\ln t + \frac{1}{x}\right) y(t)\, dt = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}.$$

В этом случае предлагается пойти следующим путем: так как при любом $y(t)$

$$y(x) = -\int_1^e \left(\ln t + \frac{1}{x}\right) y(t)\, dt + \frac{2}{x} + \frac{1}{2} = -\int_1^e (\ln t) y(t)\, dt - \frac{1}{x}\int_1^e y(t)\, dt + \frac{2}{x} + \frac{1}{2} = \frac{a}{x} + b,$$

то $y(x) \in \mathbf{L}(1, 1/x)$. Далее следует перейти к рассмотрению линейного оператора вида $F : \mathbf{L}(1, 1/x) \to \mathbf{L}(1, \frac{1}{x})$, где $F(y(x)) = y(x) + \int_1^e (\ln t + 1/x) y(t)\, dt$. Несложно указать матрицу этого оператора в базисе $(e_1 = 1, e_2 = 1/x)$ пространства $\mathbf{L}(1, 1/x)$:

$$F(e_1) = 1 + \int_1^e \left(\ln t + \frac{1}{x}\right) dt = 2e_1 + (e-1)e_2, \quad F(e_2) = \frac{1}{x} + \int_1^e \left(\frac{\ln t}{t} + \frac{1}{x}\frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}e_1 + 2e_2.$$

Тогда исходное интегральное уравнение равносильно операторному уравнению

$$F(y(x)) = \frac{2}{x} + \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad F(y(x)) = \frac{1}{2}e_1 + 2e_2.$$

Матрица оператора F в рассматриваемом базисе имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ e-1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A_1 = \frac{9-e}{2}.$$

В силу невырожденности матрицы A_1 оператор F также невырожденный, а значит, имеет обратный, матрицей которого в рассматриваемом базисе будет

$$A_1^{-1} = \frac{2}{9-e} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 1-e & 2 \end{pmatrix}.$$

Решением интегрального уравнения является образ вектора $e_1/2 + 2e_2$ при операторе F^{-1}, который находится следующим образом:

$$Y = A_1^{-1}X = \frac{2}{9-e} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 1-e & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{9-e} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1-e}{2} + 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{9-e} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{9-e}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, исходное интегральное уравнение имеет единственное решение $y(x) = 1/x$.

Таким образом, принимая во внимание междисциплинарные связи методы развитые в линейной алгебре применимы в приложениях дифференциальных уравнений.

Литература

1. Березкина Л. Л. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра.* Мн.: РИВШ, 2015.

2. *Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2. Линейная алгебра. Анализ функций многих переменных* / В.К.Ахраменко [и др.]; под ред. Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. Мн.: БГУ, 2014.

3. *Высшая математика. Сборник задач: учеб. пособие. В 3 ч. Ч 3. Дифференц. уравнения. Аналитические функции. Элементы функционального анализа* / М.А. Глецевич [и др.]; под. ред.: Н.Г. Абрашиной-Жадаевой, В.Н. Русака. Мн.: БГУ, 2015.

4. Шилин А. П. *Дифференциальные уравнения: Подробный разбор решений типовых примеров. 1800 однотипных многовариантных заданий по важнейшим темам курса. Коллекция важнейших типов решений алгоритмического характера*: Учебное пособие. М.: ЛЕНАНД, 2017.