О ПРИМЕНЕНИИ МАТРИЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л.Л. Березкина, А.А. Егоров

В данном сообщении обсуждается возможность введения элементов матричного анализа [1] при изучении раздела «Системы линейных уравнений» дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», читаемой на первом курсе факультета радиофизики и компьютерных технологий Белгосуниверситета. По мнению авторов, такой подход к изложению материала позволяет дать более строгое теоретическое обоснование метода Гаусса и его различных модификаций. Кроме того, полученные студентами навыки использования матричных вычислений будут весьма полезными при изучении других разделов дисциплины.

Пусть $A = A_{m\times n}$ – прямоугольная матрица ранга r, причем все ее угловые миноры до r-го порядка включительно отличны от нуля. Рассмотрим последовательность матриц

$$A_k = L_k A_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \quad A_0 = A, \tag{1}$$

где квадратная матрица L_k и обратная к ней L_k^{-1} представляют собой элементарные нижние треугольные матрицы вида

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1/a_{kk}^{(k-1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -a_{k+1,k}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -a_{mk}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{kk}^{(k-1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & a_{k+1,k}^{(k-1)} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{mk}^{(k-1)} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица L_k строится по k-му столбцу матрицы A_{k-1}, полученной на предыдущем шаге гауссовой процедуры. После r шагов процесса исключения неизвестных приходим к разложению матрицы A на множители $A = LA_r$, где $L = L_1^{-1}L_2^{-1}\ldots L_r^{-1}$ – нижняя треугольная матрица порядка m, на главной диагонали которой в первых r строках расположены ведущие элементы $a_{kk}^{(k-1)}$ метода Гаусса, а остальные диагональные элементы равны единице, A_r – трапециевидная матрица ранга r. Указанный способ разложения матрицы на множители известен как схема единственного деления.

Если какие-либо из первых r угловых миноров матрицы A равны нулю, то вместо последовательности (1) следует рассмотреть последовательность матриц

$$\widetilde{A}_k = \widetilde{L}_k P_{ki_k} \widetilde{A}_{k-1} R_{kj_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, r, \quad \widetilde{A}_0 = A, \quad k \leqslant i_k \leqslant m, \quad k \leqslant j_k \leqslant n,$$

где P_{ki_k}, R_{kj_k} – элементарные матрицы перестановок строк и столбцов соответственно. В этом случае матрица $\widetilde{A}_k$ строится по k-му столбцу матрицы $P_{ki_k}\widetilde{A}_{k-1}R_{kj_k}$. После r шагов исключения неизвестных получим разложение

$$P_{ri_r}P_{r-1,i_{r-1}}\dots P_{1i_1}AR_{1j_1}R_{2j_2}\dots R_{rj_r} = \widehat{L}_1\widehat{L}_2\dots\widehat{L}_r\widetilde{A}_r,$$

в котором матрицы $\widehat{L}_k$ отличаются от матриц $\widetilde{L}_k$ только перестановкой поддиагональных элементов в k-м столбце, $\widetilde{A}_r$ – трапециевидная матрица. Описанный процесс приводит к методу Гаусса с выбором ведущего элемента.

В докладе будут приведены и другие способы факторизации матрицы, а также рассмотрены примеры применения матричных преобразований для конкретных систем линейных уравнений.

Литература

1. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984.