ОБ УТОЧНЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ $(\cdot)^0$ И АКТУАЛЬНОСТИ УЧЕТА ЕЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММАХ

Е.А. Ермолаев

В [1–5] предложена и детально исследована уточненная операция возведения в нулевую степень $(\cdot)^0$, рассматриваемая над некоторыми видами многомерных коммутативных гиперкомплексных чисел, а также над квадратными матрицами. При этом развит аппарат указанных чисел, использован и усовершенствован формализм (обобщенной) обратной матрицы Дразина. С помощью полученных алгебраических результатов построена матричная теория оператора дифференцирования, применимая к определенным типам периодических краевых задач для разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений; проведен конструктивный анализ некоторых дифференциальных систем, изучаемых в физике. При изложении доклада [5] имело место подробное обсуждение свойств уточненной операции $(\cdot)^0$ над комплексными числами и квадратными матрицами.

Отметим следующие результаты, полученные при анализе свойств и возможностей применения введенной операции $(\cdot)^0$.

1. С учетом данной операции развит аппарат некоторых видов многомерных коммутативных гиперкомплексных чисел. В рассмотренных при этом случаях уточненная нулевая степень z^0 числа z понимается как произведение $z^0 = z^{-1}z$, где z^{-1} – обобщенное обратное число для z, введенное по аналогии с определением обратной матрицы Дразина. Получены в явной форме значения величин z^{-1} и z^0, причем $z^0 = 1$, если и только если можно z обратить в обычном смысле. С использованием указанных гиперкомплексных чисел и введенных над ними операций $(\cdot)^{-1}$, $(\cdot)^0$ получены точные решения некоторых классов нелинейных дифференциальных систем Федорова, изучаемых в теоретической физике. Кроме того, дана физическая трактовка обобщенного обращения обычных комплексных чисел (образующих поле $\mathbb{C}$).

2. Предложены два независимых логически (но, как представляется, одинаково естественных) способа вычисления уточненной нулевой степени A^0 квадратной матрицы A (конечного порядка $n = 1, 2, \ldots$ над полем $\mathbb{C}$): 1) путем экстраполяции значений показателя степени, если A приводится к диагональному виду; 2) на основании понимания A^0 как предельной величины (в общем случае A). Полученные с помощью этих способов результаты оказались согласованными друг с другом и с ранее предложенным в работах автора пониманием A^0 как произведения $A^0 = A^{-1}A = AA^{-1}$, где A^{-1} – обратная матрица Дразина для A. Приведенное значение величины A^0 совпадает с единичной $(n\times n)$-матрицей I, если $\det A \neq 0$, но отличается от I, если $\det A = 0$.

3. В случае общего вида $(n\times n)$-матрицы A над $\mathbb{C}$ ее уточненная нулевая степень

введена как проекционная матрица $A^0 = A^0A^0$, совпадающая с некоторым предельным значением корня p-й степени $(A^n)^{1/p}$ из матрицы A^n при $p \to \infty$, где $n, p = 1, 2, \ldots$ $(n < \infty)$. Установлено, что для любой вырожденной матрицы A $(\det A = 0)$ ее уточненная нулевая степень A^0, понимаемая в указанном предельном смысле, тоже является вырожденной матрицей и поэтому не может равняться единичной $(n \times n)$-матрице I. С учетом изученных свойств уточненной операции $(\cdot)^0$ развит формализм обратной матрицы Дразина. В частности, усовершенствована ее аксиоматика.

4. Благодаря использованию развитых формализмов обратной матрицы Дразина и коммутативных гиперкомплексных чисел построена матричная теория оператора дифференцирования d/dx, действующего в пространстве периодических функций. Адекватной моделью такого оператора служит вырожденная циркулянтная матрица D конечного порядка (оператор дискретного дифференцирования). Для D получены в различных формах, включая интегральное представление, операторы D^{-1} и $D^0 = D^{-1}D = DD^{-1}$, где D^{-1} является для D обратной матрицей Дразина и в то же время псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза; уточненная нулевая степень D^0 оператора D не совпадает с единичной матрицей I, так как $\det D^0 = \det D = 0$. Оператор D и его целые степени приведены к диагональному виду, что может оказаться полезным для приложений. Показано, что разработанная матричная теория оператора d/dx может быть использована при анализе периодических краевых задач для разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений (эта теория дает соответствующий результатам [6, гл. IV] универсальный способ редукции указанных задач к эквивалентным интегральным уравнениям).

Если попытаться выделить из перечисленных результатов главный, то с теоретической и прикладной точек зрения таким результатом представляется разработанный в работах [2, § 2; 4, § 2, § 3] подход к нулевой степени квадратной матрицы (в частности, комплексного числа) как предельной величине. Благодаря такому подходу обнаружена и устранена долго не замечавшаяся в математических теориях методическая некорректность применения в них традиционного (единичного) значения нулевой степени вырожденной матрицы (в частности, числа 0).

Эти научные факты, установленные лишь в последние годы, оказались настолько неожиданными для ряда специалистов, что даже не без труда ими воспринимались. Тем не менее, к настоящему времени уже не осталось никаких сомнений в том, что указанные факты нужно впредь учитывать в следующих ситуациях: 1) чтение вузовских лекций по высшей математике и ее приложениям (в частности, к некоторым областям физики); 2) подготовка к изданию соответствующей научной, справочной, учебной и научно-популярной литературы; 3) разработка программ для самых разных по сложности и назначению электронных вычислительных машин (компьютеров), начиная с простейших инженерных и научных калькуляторов.

Если, например, с помощью какого-либо из подобных калькуляторов, разработанных к данному времени, попытаться вычислить значение величины 0^0, то в итоге получим либо ее традиционное значение, равное единице, либо указание на то, что поставленная задача не является корректной. Согласно же [4, п. 2.1], где нулевая степень комплексного числа рассматривается как предельная величина, единственно возможным (уточненным) значением величины 0^0 в поле $\mathbb{C}$ оказывается нулевое число:

$$0^0 = \lim_{p\to\infty} 0^{1/p} = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{0} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Естественность и непротиворечивость уточненного равенства $0^0 = 0$ видны как из приведенных соотношений, так и из формул

$$0^0 = 0 \cdot \lambda^0 = 0, \quad \lambda \neq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda^0 = 1).$$

Литература

1. Ермолаев Е. А. *Ассоциативные алгебры в теории классических полей.* Могилев: БРУ, 2008.
2. Ермолаев Е. А. *Матричная теория оператора дифференцирования в пространстве периодических функций.* Ч. 1 (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 23). Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2010.
3. Ермолаев Е. А. *Матричная теория оператора дифференцирования в пространстве периодических функций.* Ч. 2 (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 24). Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2011.
4. Ермолаев Е. А. *Нулевые степени вырожденной матрицы и оператора численного дифференцирования* (Препринт / Ин-т технологии металлов НАН Беларуси; № 34). Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2013.
5. Ермолаев Е. А. *Об уточненных значениях нулевых степеней вырожденной матрицы и оператора дискретного дифференцирования* // XII Белорус. матем. конф.: Материалы междунар. науч. конф. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. Ч. 1. С. 42–43.
6. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.