ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

И.В. Коноплева

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Научно-исследовательская работа является одним из видов профессиональной деятельности, которой должен овладеть выпускник вуза. Задача преподавателя – познакомить студентов с методологией и опытом научного познания, способствовать развитию творческого мышления. Вовлечение в учебно-и научно-исследовательскую работу происходит поэтапно, на младших курсах используются технологии проблемного обучения и метода проектов (участие курсантов в ежегодной Международной молодежной конференции «Гражданская авиация: XXI век»). Особое значение владение исследовательскими методами с привлечением информационных технологий имеет для выпускников специалитета и магистратуры. Формированию навыков научно-исследовательской деятельности в процессе изучения математики способствует использование приемов математического моделирования. Для студентов УИГА читаются спецкурсы «Методы научных исследований», «Математические методы и модели в авиации (области поиска и спасания; области авиационной безопасности)», использующие аппарат дифференциальных уравнений с приложениями к задач аэроупругости, аэродинамики, прочности конструкций, теории управления. Приведем несколько примеров.

Уравнения движения сверхзвукового самолета в проекциях на оси координат (mg – сила тяготения, F_T – сила тяжести, N – подъемная сила) имеют вид

$$m\dot{v}_x = F_T\cos\alpha - Q\cos\alpha - N\sin\alpha, \quad m\dot{v}_y = F_T\sin\alpha - Q\sin\alpha + N\cos\alpha - mg. \qquad (1)$$

С учетом равенств $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_y = v\sin\alpha$, $v_x = v\cos\alpha$ систему (1) можно записать в виде

$$m\frac{dv}{dy} = \frac{F_T - Q - mg\sin\alpha}{mv\sin\alpha} = f(v,\alpha), \quad m\frac{d\alpha}{dy} = \frac{N - Q - mg\cos\alpha}{mv^2\sin\alpha} = \varphi(v,\alpha). \qquad (2).$$

Здесь $Q = 0.5k_1\rho v^2$ – сила сопротивления воздуха, $N = 0.5k_2\rho v^2$ – подъемная сила, k_1 (k_2) – коэффициенты сопротивления (подъемной силы) воздуха, ρ – его плотность, S – площадь крыльев. Плотность воздуха подчиняется закону Больцмана и зависит от температуры, сила тяги является функцией высоты и скорости, она определяется эмпирическими формулами. При заданнных значениях параметров самолета и внешней среды требуется построить дискретную модель, разностную схему, составить алгоритм решения системы ОДУ и провести компьютерное моделирование полета при заданных начальной скорости v_0 и начальном угле α_0, исследовать изменение скорости и угла полета от высоты при различных значениях начальной скорости (угла), изменение скорости и угла на различных высотах, выяснить условия достижения максимальной высоты, построить фазовые диаграммы.

Аналогично можно рассмотреть задачи о вертикальном взлете ракеты, о полете баллистической ракеты, о траекториях движения космических тел. Примеры моделирования физических процессов с помощью ОДУ и ДУЧП (свободное падение тела с учетом сопротивления среды, движение тела, брошенного под углом к горизонту с учетом сопротивления среды, движение тела с переменной массой, дадача о распределении тепла в стержне и т.п.) с использованием прикладных программ и программных сред MS Excel, Visual Basic Application (VBA) в Excel, Maple можно найти в [1].

В [2] рассмотрены различные направления математического моделирования в сфере эксплуатации воздушного транспорта, в частности в задачах исследования динамики полета воздушного судна (ВС) на основе законов аэродинамики. Движение ВС рассматривается как движение твердого тела с шестью степенями свободы и представляет собой систему восемнадцати ОДУ первого порядка с переменными коэффициентами, среди которых есть нелинейные уравнения (шесть уравнений описывают угловое положение ВС, шесть – математическое описание автопилота и шесть – движение ВС в земной системе координат). Решить аналитически такую систему невозможно, поэтому при определенных допущениях рассматривают упрощенные задачи – линеаризованные системы. При этом исходную систему разбивают на две подсистемы уравнений, одна из которых описывает продольное движение, вторая – боковое. Рассмотрены выводы этих уравнений, два метода их решения (метод численного интегрирования и малых отклонений), получены линеаризации уравнений продольного движения и задачи автопилотирования. Составлены задания для проведения вычислительных экспериментов (численных и аналитических) для анализа устойчивости движения ВС при различных режимах полета.

В современных исследованиях возрастает интерес к проблемам прочности, исследующим упругие и пластические деформации элементов конструкции самолета. Это связано с появлением новых задач в аэрокосмической отрасли (расчет характеристик лопаток и дисков турбин авиационных двигателей). Математический аппарат для решения таких задач использует методы уравнений математической физики, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления. В [3] рассматривается аналитическое решение задачи, описывающей процесс разрушения металлических конструкций в условиях ползучести. Она описывается системой, состоящей из уравнения, связывающего деформацию ползучести $\varepsilon = \varepsilon(t)$ с действующим напряжением $\sigma = \sigma(\varepsilon, t)$ и эволюционного уравнения, описывающего развитие поврежденности $\omega = \omega(t)$ в конструкции:

$$\dot{\varepsilon} = f_1(\sigma, T)/\Psi(\omega, t), \quad \dot{\omega} = f_2(\sigma, T)/\Psi(\omega, T).$$

Здесь t – время, T – температура, функции в правых частях определяются экспериментально. Для $T = \mathrm{const}$ уравнения с однородными начальными условиями $\varepsilon(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ имеют вид $\dot{\varepsilon} = f_1(\sigma)/\Psi(\omega)$, $\dot{\omega} = f_2(\sigma)/\Psi(\omega)$. Интегрирование системы дает неявное выражение для деформации ползучести. При постоянных нагрузке и температуре с использованием теоремы Чебышева об интегрировании биномиального дифференциала получены необходимые и достаточные условия интегрируемости начальной задачи. Студентами рассмотрены численные методы решения задачи ползучести для марок сталей, используемых в авиастроении. Применение здесь традиционных численных методов вызывает определенные сложности, т.к. из-за накапливаемой погрешности можно пропустить момент разрушения, поэтому для решения пришлось выбирать и применять специальные методы (метод наилучшей параметризации).

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

В работе [4] рассмотрена задачи измерения уровня вязкой несжимаемой жидкости в баке ракеты-носителя по уровню жидкости в измерительной трубке. Базовая модель является первой краевой задачей для нелинейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа

$$u_t - v\Delta u = f(t,u), \quad u|_{D_0} = \varphi, \quad u|_{\Gamma_T} = 0.$$

Для линейного изменения уровня жидкости она решена численно в wxMaxima–5.28.0, вычислительный эксперимент занимает много времени. Базовая модель сводится к эмпирической:

$$\ddot{l} = -\lambda/(4R)\dot{l}|\dot{l}| - g(t)(1 - h(t)/l), \quad l(0) = l_0, \quad \dot{l}(0) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Студенты использовали для расчетов в MAPLE метод Рунге–Кутты 7–8 порядка. Результаты численного эксперимента показали, что эмпирическая модель менее точная, но время вычислений на пять порядков меньше. Точность решения можно повысить, уменьшая шаг интегрирования, начиная с шага $h = 0.05$ максимальное отклонение уровней жидкости в трубке для двух моделей не превосходит 14 мм.

Литература

1. Широкова О. А. *Практикум по компьютерному математическому моделированию.* Ч. II. Казань: КФУ, 2015.

2. Лебедев А. М. *Исследование процессов эксплуатации воздушного транспорта методами математического моделирования* Ульяновск: УИГА, 2015.

3. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. *Об аналитическом решении одной задачи ползучести модели* // Журн. Средневолжск. мат. о-ва. 2018. Т. 20. № 3. С. 282–294.

4. Клюев Н. И., Филатов О. П. *Модели измерения уровня жидкости в баке ракеты-носителя* // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2015. Вып. 3 (125). С. 88–96.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/