УДК 517.927.4

К ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. М. ГРЕБЕНЦОВ
Могилевский государственный университет продовольствия
Могилев, Беларусь

Исследуется задача об ω-периодических решениях системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda A(t)x + \lambda B(t)\frac{dx}{dt} + f(t),\; x \in R^n, \tag{1}$$

с непрерывными ω-периодическими $(n \times n)$-матрицами $A(t)$, $B(t)$, n-вектором $f(t)$; скалярным параметром λ .

Согласно методу [1], решение этой задачи можно представить в виде

$$x(t,\lambda) = c(\lambda) + z(t,\lambda), \tag{2}$$

где $c(\lambda)$ – постоянный вектор, $z(t,\lambda)$ – ω-периодическая вектор-функция, подчиненная интегральному условию

$$\int_0^\omega A(\tau)z(\tau,\lambda)d\tau = 0.$$

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,\; \gamma = \left\|\tilde{A}^{-1}(\omega)\right\|,\; \alpha = \max_t\|A(t)\|,\; \beta = \max_t\|B(t)\|,\; \sigma = \max_t\|Q(t)\|,$$

$$h = \max_t\|f(t)\|,\; \varepsilon = |\lambda|,\; q = \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \gamma\alpha\sigma\omega + \beta\right),\; t \in [0;\omega].$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det\tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < \varepsilon q < 1$. *Тогда* ω-*периодическое решение уравнения* (1) *существует и единственно и представимо в виде* (2), *при этом справедливы оценки*

$$\|c(\lambda)\| \le \frac{\gamma h\omega}{\varepsilon} + \frac{\gamma\beta\omega^2 h(1+\alpha\gamma\omega)}{2(1-\varepsilon q)},\; \|z(t,\lambda)\| \le \frac{\gamma\alpha\omega^3 h(1+\alpha\gamma\omega)}{4(1-\varepsilon q)},$$

$$\|dz(t,\lambda)/dt\| \le \frac{\omega h(1+\alpha\gamma\omega)}{2(1-\varepsilon q)}.$$

Для построения решения предлагается итерационный алгоритм

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

$$c_{k+1}(\lambda) = -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} Q(\tau)y_k(\tau,\lambda)d\tau - \frac{1}{\lambda}\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} f(\tau)d\tau,$$

$$z_{k+1}(t,\lambda) = \int_0^{\omega} K_A(t,\tau)y_k(\tau,\lambda)d\tau,\ K_A(t,\tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma,\ 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma,\ 0 \le t < \tau \le \omega, \end{cases}$$

$$y_{k+1}(t,\lambda) = \int_0^{\omega} \varphi(t,\tau)\left[\lambda A(\tau)c_k(\lambda) + \lambda A(\tau)z_k(\tau,\lambda) + \lambda B(\tau)y_k(\tau,\lambda) + f(\tau)\right]d\tau,$$

$$k = 0,1,2\ldots,\ c_0 = -\frac{1}{\lambda}\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^{\omega} f(\tau)d\tau,\ z_0 = 0,\ y_0 = 0,$$

где $y(t,\lambda) = dz(t,\lambda)/dt$, $Q(t) = B(t) - \overline{B}$ ($\overline{B}$ – интегральное среднее матрицы $B(t)$ на $[0,\omega]$), $\varphi(t,\tau) = K_E(t,\tau)$ (E – единичная матрица).

Доказательство теоремы, а также исследования сходимости, скорости сходимости выполнены в [2], при этом получена оценка

$$\tilde{\psi}_k \le N^k (E - N)^{-1}\psi_0,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

где $\tilde{\psi}_k = \text{colon}\left(\|c - c_k\|, \|z - z_k\|_C, \|y - y_k\|_C\right)$,

$$E - N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma\sigma\omega \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 \\ -\frac{\varepsilon\alpha\omega}{2} & -\frac{\varepsilon\alpha\omega}{2} & 1 - \frac{\varepsilon\beta\omega}{2} \end{pmatrix},\ \psi_0 = \text{colon}\left(\|c_0\|, \|z_0\|_C, \|y_0\|_C\right).$$

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальный уравнений / В. Н. Лаптинский // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1990. – № 5. – С. 25–30.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ и структурные свойства периодических решений линейных многомерных систем второго порядка с параметром / В. Н. Лаптинский, Ю. М. Гребенцов. – Могилев: Могилев. гос. ун-т продовольствия, 2017. – Ч. 1. – 54 с.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/