УДК 517.925

# К ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

А. И. КАШПАР
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Изучается краевая задача типа [1]

$$\ddot{X} = A(t)\dot{X} + \dot{X}B(t) + \left(\lambda A_1(t) + \lambda^2 P(t)\right)X + X\left(\lambda B_1(t) + \lambda^2 Q(t)\right) +$$

$$+ \lambda(\mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}, \ \ \mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N}, \ \ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{F}(t), \mathbf{P}(t), \mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t)\ (i=1,2), \mathbf{P}(t), \mathbf{Q}(t)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы; $\omega > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, $\dot{\mathbf{X}} = d\mathbf{X}/dt$.

На основе применения метода [2, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и алгоритм построения решения.

Обозначения: $\gamma = \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|$, $\alpha_i = \max\limits_{0\le t\le\omega}\left\|\mathbf{A}_i(t)\right\|$, $\beta_i = \max\limits_{0\le t\le\omega}\left\|\mathbf{B}_i(t)\right\|$, $\delta_1 = \max\limits_{0\le t\le\omega}\left\|\mathbf{P}(t)\right\|$, $\delta_2 = \max\limits_{0\le t\le\omega}\left\|\mathbf{Q}(t)\right\|$, $\lambda_U = \max\limits_{0\le\tau\le t\le\omega}\left\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\right\|$, $\lambda_V = \max\limits_{0\le\tau\le t\le\omega}\left\|\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t)\right\|$, $\varepsilon = |\lambda|$; $\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)$, $\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)$, $a = \varepsilon\gamma\dfrac{\omega^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2\left(\alpha_1 + \beta_1 + \varepsilon(\delta_1 + \delta_2)\right)$, $b = \varepsilon\gamma\dfrac{\omega^2}{2}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2 + \beta_2)$, $\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$, $\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n$, $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m$, $\mathbf{E}_k = diag(1,1,\ldots,1)$, $\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор, $\mathbf{\Phi Z}(t) = \int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $t \ne \tau$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

По методике [2] задача (1), (2) сведена к эквивалентной интег ральной задаче

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int\limits_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau,$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) +$$

$$+\ \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t),$$

где $\mathbf{H}(t,\lambda) = \left(\lambda\mathbf{A}_1(t) + \lambda^2\mathbf{P}(t)\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\lambda\mathbf{B}_1(t) + \lambda^2\mathbf{Q}(t)\right) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t)$.

**Теорема.** *Пусть выполнены условия: оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однознач-*

*но обратим,*

$$a+b<1. \tag{3}$$

*Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима.*

Решение задачи получено в виде

$$\mathrm{X}(t,\lambda)=\mathrm{X}_0(t)+\lambda\mathrm{X}_1(t)+\ldots+\lambda^k\mathrm{X}_k(t)+\ldots, \tag{4}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{Y}_0(t)+\lambda\mathbf{Y}_1(t)+\ldots+\lambda^k\mathbf{Y}_k(t)+\ldots\ , \tag{5}$$

где

$$\mathbf{X}_0(t)=\mathbf{M}+\int_0^t\mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_0(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathbf{Y}_0(t)=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_0(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t),$$

$$\mathbf{X}_{m+1}(t)=\int_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\mathbf{K}_\mathbf{U}(\tau,s)\mathbf{H}_m(s)\mathbf{K}_\mathbf{V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t),\quad m=0,1,2,\ldots\ .$$

Установлено, что условие (3) представляет собой условие равномерной сходимости по $t\in[0,\omega]$ рядов (4), (5) в области значений параметра $|\lambda|<\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0$ – величина, эффективно определяемая из (3).

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена задача об определении распределения температуры в круговой цилиндрической оболочке (см., например, [3]):

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{w_0}{\lambda_0}(1+bT)=0;\quad T(r_1)=\tilde{T}_1,\quad T(r_2)=\tilde{T}_2,\quad 0<r_1<r_2,$$

где $w_0$ – удельная мощность постоянно действующего внутреннего источника теплоты при $t=0°\mathrm{C}$; $b$ – экспериментальная постоянная, $\lambda_0$ – коэффициент теплопроводности, $r_1$ и $r_2$ – внутренний и внешний радиусы стенки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Кашпар, А. И.** О построении решения краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018. – № 2. – С. 45–54.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Теория тепломассообмена: учебник для вузов / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва: Высшая школа, 1979. – 495 с.


Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/