

УДК 533.6

К ЗАДАЧЕ О ДИНАМИЧЕСКОМ ЛАМИНАРНОМ  
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В АВТОМОДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет  
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача (см., например, [1, с. 160]) о динамическом ламинарном пограничном слое для течения жидкости вдоль плоской пластины

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (2)$$

Аналитическое решение этой задачи получено только в случае пластины, обтекаемой в продольном направлении ( $m = 0$ ) – безградиентное обтекание;  $m$  – параметр, характеризующий скорость потенциального течения.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [2, 3], в градиентном случае для значений  $0 \leq m < 1/3$  получено сравнительно простое приближенное численно-аналитическое решение задачи (1), (2) в виде

$$f(\eta) \approx \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left( - \left( \frac{b}{\lambda} \tau + \left( \frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left( 2 \left( \frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b)\lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau, \quad (3)$$

где  $a = (m+1)/2$ ,  $b = m$ ,  $\lambda = f''(0)$ .

Значения  $\lambda = \lambda(m)$  вычисляются из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left( - \left( \varphi(0)\tau + \frac{\varphi'(0)}{2!} \tau^2 + \frac{\varphi''(0)}{3!} \tau^3 + \dots + \frac{\varphi^{(VIII)}(0)}{9!} \tau^9 \right) \right) d\tau - 1 = 0,$$

где величины  $\varphi^{(i)}(0)$ ,  $i = \overline{0,8}$  определяются на основе решения вспомогательной задачи

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \varphi^2 - a f \varphi + (a - 2b) \frac{df}{d\eta}, \quad \varphi(0) = \frac{b}{\lambda}$$

по известной методике последовательного дифференцирования с использованием (1), (2). С целью наглядной иллюстрации и сравнения эффективности приближения (3) для  $m = 0,25$  на рис. 1 приведены графики (точно-



го) численного решения задачи (1), (2) и его первых двух производных, а также графики приближенного решения и соответствующих производных. Все расчеты выполнены для общепринятого в научной литературе промежутка  $0 \leq \eta \leq 8,8$ . Однако соответствующие графики построены для практически значимых промежутков.

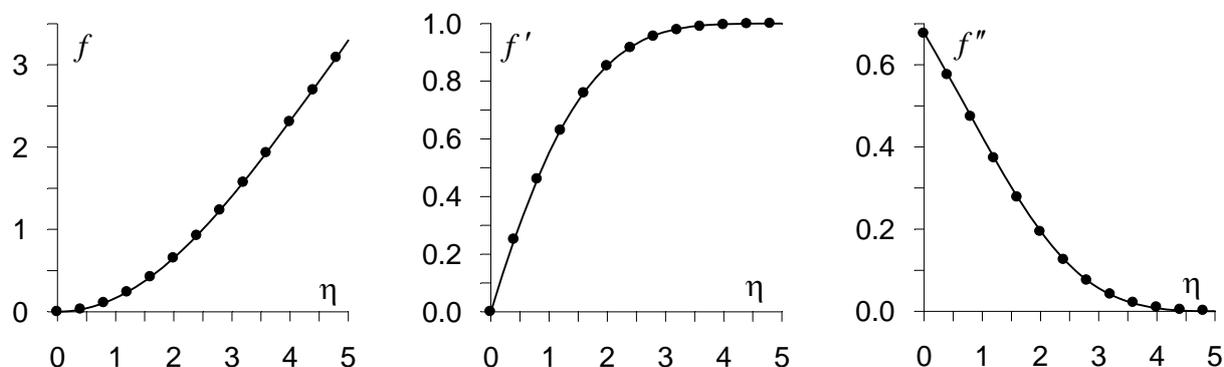


Рис. 1. Графики  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$  и  $f''(\eta)$  для  $m = 0,25$  (точки соответствуют точному решению, сплошная линия – приближению (3))

Приближение (3) для функции  $f(\eta)$  и ее первой производной обеспечивает погрешность не более 0,5 % в промежутке  $0 \leq t \leq 8,8$ . Вторая производная достаточно быстро убывает, поэтому по величине относительной погрешности трудно судить о качестве приближения. Полученное приближенное решение использовано для расчетов охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье металлов и сплавов, а именно для расчетов толщин динамического и теплового пограничных слоев, локального коэффициента теплоотдачи, касательного напряжения на стенке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974.
2. Лаптинский, В. Н. К решению задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Еругинские чтения – 2014: тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.: в 2 ч. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. – Ч. 2. – С. 65–66.
3. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72–93.