УДК 517.927.4

# К РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+XB(t)+\lambda XQ(t)X+\lambda F(t,X),\ X(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0,\lambda)=X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $t\in I$, $A,\ B,\ Q\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F\in\mathbb{C}\left(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $I=[0,\omega]$, $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $0<\tilde\rho\le\infty$.

Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho}=\{(t,X):t\in I,\ \|X\|<\tilde\rho\}$ удовлетворяет относительно $X$ условию Липшица (локально); $F(t,0)\not\equiv 0$.

Двухточечная краевая задача при $Q=0$, $\lambda=1$ качественными методами исследовалась в [1], конструктивными методами [2] – в [3], с периодическими краевыми условиями – в [4].

В данной работе на основе применения конструктивного метода [5] по исходным данным задачи (1), (2) получены достаточные условия ее однозначной разрешимости, а также оценка области локализации решения.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho=\{(t,X):0\le t\le\omega,\ \|X\|\le\rho\},\ M=\int_0^\omega A(\tau)d\tau,$$

$$N=-\int_0^\omega B(\tau)d\tau,\ \gamma=\left\|\Phi^{-1}\right\|,\ \alpha=\max_t\|A(t)\|,\quad \beta=\max_t\|B(t)\|,$$

$$\delta=\max_t\|Q(t)\|,\quad h=\max_t\|F(t,0)\|,$$

$$\varphi(\rho)=\gamma\varepsilon\delta\omega\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\rho^2+\gamma\omega\left[\varepsilon L+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\varepsilon L)\omega\right]\rho+$$
$$+\ \varepsilon\gamma\omega h\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],\quad \varphi_1(\rho)=\varepsilon\gamma\omega\left(\delta\rho^2+L\rho+h\right),$$

$$\varphi_2(\rho)=\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2\left[\varepsilon\delta\rho^2+(\alpha+\beta+\varepsilon L)\rho+\varepsilon h\right].$$

$$q(\rho)=\gamma\varepsilon\delta\omega\left[(\alpha+\beta)\omega+2\right]\rho+\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\varepsilon L)\omega^2+\gamma\varepsilon L\omega,$$

где $0<\rho<\tilde{\rho}$, $t\in I$, $\varepsilon=|\lambda|$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области $D_\rho$, $\Phi$ – линейный оператор, $\Phi Z=MZ-ZN$, $\|\cdot\|$ – согласованная в смысле [6, с. 410] норма матриц.

**Теорема.** *Пусть матрицы $M$, $N$ не имеют общих характеристических чисел, а также выполнены следующие условия*:

$$\varphi(\rho)\le\rho,\ q(\rho)<1. \tag{3}$$

*Тогда в области $D_\rho$ решение $X(t,\lambda)$ задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо в виде $X(t,\lambda)=C+Y(t,\lambda)$, где $C$ – постоянная матрица, $Y(t,\lambda)$ – матрица, подчиненная условиям $Y(0,\lambda)=Y(\omega,\lambda)$, $\int_0^\omega\left[A(\tau)Y(\tau,\lambda)+Y(\tau,\lambda)B(\tau)\right]d\tau=0$, при этом справедливы оценки $\|C\|\le\varphi_1(\rho)$, $\|Y(t,\lambda)\|\le\varphi_2(\rho)$.*

Для построения решения разработан алгоритм в виде рекуррентных интегральных соотношений, согласно которым оно представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, удовлетворяющих условию (2). Дана оценка области значений параметра $\lambda$, допустимых условиями (3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

3. **Лаптинский, В. Н.** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 994–996.

4. **Лаптинский, В. Н.** О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В. Н. Лаптинский // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С.14 –18.

5. **Лаптинский, В. Н.** Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений / В. Н. Лаптинский // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 5. – С. 25–30.

6. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.