УДК 517.927.4

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda\left(A(t)X + XB(t) + F(t,X)\right), \qquad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F \in \mathbb{C}\left(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \left\{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\right\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально), M, N – вещественные $(n \times n)$-матрицы.

Эта задача качественными методами исследовалась в [1]. Данная работа является продолжением и развитием [2, 3]. С помощью конструктивного метода [4] получены в терминах задачи (т. е. по ее исходным данным) достаточные условия однозначной разрешимости, алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \left\{(t,X) : t \in I, \|X\| \le \rho\right\},\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$h = \max_t \|F(t,0)\|,\ \mu = \max\left\{\|M\|, \|N\|\right\},\ \gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|,\ q = \gamma\mu(\alpha + \beta + L)\omega,$$

$$p = \gamma\mu\omega h,\ \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,\ \varepsilon = |\lambda|,\ \varepsilon_0 = \frac{\rho}{q\rho + p},$$

где $\Phi = M + N$, $0 < \rho < \tilde\rho$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в D_ρ, $\|\bullet\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21], $\mathbb{C} = \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ – банахово пространство непрерывных $(n \times n)$-матриц.

Теорема. *Пусть выполнено условие* $\det\Phi \ne 0$. *Тогда при* $|\lambda| \le \varepsilon_0$ *решение задачи* (1), (2) *в области* D_ρ *существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соот-*

ношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varepsilon p / (1-\varepsilon q)$.

Это рекуррентное соотношение представляет собой итерационный алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений (например, [6, с. 605]):

$$X_k(t) = \lambda\Phi^{-1}\left\{M\int_0^t \left[A(\tau)X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + F\left(\tau, X_{k-1}(\tau)\right)\right]d\tau - \right.$$

$$\left. - N\int_t^\omega \left[A(\tau)X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau)B(\tau) + F\left(\tau, X_{k-1}(\tau)\right)\right]d\tau\right\}, \quad k = 1, 2, ..., \qquad (3)$$

где $X_0(t)$ – произвольная функция класса $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$. При этом все последовательные приближения удовлетворяют краевому условию (2). Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – P. 505–515.

2. **Лаптинский, В. Н.** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 994–996.

3. **Лаптинский, В. Н.** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

5. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

6. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.