УДК 517.927.4

К ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

С. В. ПОДОЛЯН
Могилевский государственный университет продовольствия
Могилев, Беларусь

Исследуется задача о периодических решениях с периодом ω уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + X(\lambda B(t) + \lambda^2 C(t)) + \lambda F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $F(t)$ – действительные непрерывные ω – периодические матрицы подходящих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В данной работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2–4], на основе применения метода [5, гл. 2] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности ω-периодического решения уравнения (1), а также предложен алгоритм его построения.

Введены следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int_0^{\omega} B(\tau)d\tau,\ \gamma = \left\|\tilde{B}^{-1}(\omega)\right\|,\ \varepsilon = |\lambda|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|C(t)\|,\ h = \max_t \|F(t)\|,\ q_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\omega(\alpha+\mu),\ q_2 = \frac{1}{2}\gamma\beta(\alpha+\mu)\omega^2,$$

$$q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,\ H(\varepsilon) = \frac{1}{2}\gamma\omega h(\beta\omega\varepsilon + 2),\ t \in [0;\omega].$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$. *Тогда при* $|\lambda| < 2\Big/\left(q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_2}\right)$ *уравнение* (1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $X = X(t,\lambda)$; *это решение представимо в виде ряда*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t), \tag{2}$$

сходящегося равномерно по $t \in \mathbb{R}$, *где матрицы* $X_k(t)$ *определены рекуррентным интегральным соотношением типа* [5, гл. 2], *при этом справедлива оценка*

$$\|X(t,\lambda)\| \le \frac{H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)}. \tag{3}$$

По методу [5] аналогичная задача исследуется для уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + \lambda X B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{4}$$

Дополнительные обозначения:

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\omega\alpha,\ \tilde{q}_2 = \frac{1}{2}\gamma\beta\alpha\omega^2,\ \tilde{q}(\varepsilon) = \tilde{q}_1\varepsilon + \tilde{q}_2\varepsilon^2,\ h_i = \max_t \|F_i(t)\|,$$

$$\widetilde{H}(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}\gamma\omega(h_0 + \varepsilon h_1)(\beta\omega\varepsilon + 2).$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* $\det\tilde{B}(\omega) \neq 0$. *Тогда при* $0 < |\lambda| < 2\Big/(\tilde{q}_1 + \sqrt{\tilde{q}_1^2 + 4\tilde{q}_2})$ *уравнение* (4) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $X = X(t,\lambda)$; *это решение представимо в виде ряда*

$$X(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda}X_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k X_k(t), \qquad (5)$$

сходящегося равномерно по $t \in \mathbb{R}$, *где матрицы* $X_k(t)$ *определены рекуррентным интегральным соотношением типа* [5, *гл.* 2], *при этом справедлива оценка*

$$\|X(t,\lambda)\| \le \frac{\widetilde{H}(\varepsilon)}{1-\tilde{q}(\varepsilon)}. \qquad (6)$$

Замечание – Условия существования и единственности ω-периодического решения уравнения (4) следуют из теоремы 1 при $C(t) \equiv 0$ ($\mu = 0$), однако у уравнений (1), (4) структура решений (2), (5) и их оценки (3), (6) различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Подолян, С. В.** О построении периодических решений матричного уравнения Ляпунова с параметром / С. В. Подолян // Еругинские чтения – 2014: тез. докл. Междунар. науч. конф., Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.: в 2 ч. – Новополоцк: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. – Ч. 1. – С. 71–72.
2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. К. Лапковский, С. В. Подолян. – Могилев: МГУП, 2004.
3. **Лаптинский, В. Н.** О периодических решениях линейного матричного уравнения Ляпунова с параметром / В. Н. Лаптинский, В. К. Лапковский, С. В. Подолян // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. – 2012. – № 2 (40). – С. 4–11.
4. **Подолян, С. В.** К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова с параметром / С. В. Подолян // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы Междунар. мат. конф. – 2015. – Ч. 1. – С. 83.
5. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.