УДК 517.927.4

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

Д. В. РОГОЛЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/

Исследуется задача типа [1]:

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1(t) + \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{S}_1(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{S}_2(t)\boldsymbol{Y}\right) + \lambda\boldsymbol{F}_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt} = \boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_2(t) + \boldsymbol{Y}\left(\boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{Y}\right) + \lambda\boldsymbol{F}_2(t), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{X}(0,\lambda) = \boldsymbol{X}(\omega,\lambda),\ \boldsymbol{Y}(0,\lambda) = \boldsymbol{Y}(\omega,\lambda), \tag{3}$$

где $t \in [0,\omega]$, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\boldsymbol{A}_i(t)$, $\boldsymbol{B}_i(t)$, $\boldsymbol{S}_i(t)$, $\boldsymbol{P}_i(t)$, $\boldsymbol{F}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Матричные дифференциальные уравнения относятся к многомерным системам специального вида, включая уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений (см., например, [2]).

В настоящей работе, являющейся продолжением [1], с помощью метода [3, гл. 3] получены коэффициентные (т. е. по исходным данным задачи) достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3), а также итерационный алгоритм построения решения.

Примем следующие обозначения:

$$D = \left\{(t,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : 0 \le t \le \omega, \|\boldsymbol{X}\| \le \rho_1, \|\boldsymbol{Y}\| \le \rho_2\right\},\ \tilde{\boldsymbol{B}}_i(\omega) = \int_0^\omega \boldsymbol{B}_i(\tau)\,d\tau,\ \tilde{\gamma}_i = \left\|\tilde{\boldsymbol{B}}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i = \max_t \|\boldsymbol{A}_i(t)\|,\ \beta_i = \max_t \|\boldsymbol{B}_i(t)\|,\ \delta_i = \max_t \|\boldsymbol{S}_i(t)\|,\ \mu_i = \max_t \|\boldsymbol{P}_i(t)\|,$$

$$h_i = \max_t \|\boldsymbol{F}_i(t)\|,\ \|\boldsymbol{T}\|_C = \max_t \|\boldsymbol{T}(t)\|,\ \varepsilon = |\lambda|,\ \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

$$p_{11} = \tilde{\gamma}_1\left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2 + (\alpha_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega\right],$$

$$p_{12} = \tilde{\gamma}_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\beta_1\omega + 1\right),\ p_{21} = \tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega + 1\right),$$

$$p_{22} = \tilde{\gamma}_2\left[\frac{1}{2}\beta_2(\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega^2 + (\alpha_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_1 - \tilde{\gamma}_1 \left\{ \frac{1}{2}\beta_1 \left[(\alpha_1 + \beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \left[\alpha_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\}}{\tilde{\gamma}_1 \left(\frac{1}{2}\beta_1\omega + 1 \right) h_1\omega},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho_2 - \tilde{\gamma}_2 \left\{ \frac{1}{2}\beta_2 \left[(\alpha_2 + \beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \left[\alpha_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\}}{\tilde{\gamma}_2 \left(\frac{1}{2}\beta_2\omega + 1 \right) h_2\omega},$$

где $t \in [0, \omega]$, $0 < \rho_1, \rho_2 < \infty$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $\det \tilde{\boldsymbol{B}}_i(\omega) \neq 0 \ (i = 1, 2)$;

2) $\tilde{\gamma}_1 \left\{ \frac{1}{2}\beta_1 \left[(\alpha_1 + \beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \left[\alpha_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\} < \rho_1,$

$\tilde{\gamma}_2 \left\{ \frac{1}{2}\beta_2 \left[(\alpha_2 + \beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \left[\alpha_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\} < \rho_2;$

3) $p_{11} < 1$, $\det(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}) > 0$,

где $\boldsymbol{E} = diag(1,1)$, $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$.

Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ *задача (1)–(3) однозначно разрешима в области* D. *Решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями и удовлетворяющих условиям (3).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати условий / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

2. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва: Наука, 1975. – 496 с.

3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета
http://e.biblio.bru.by/