

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЯ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальности 1-53 01 02
«Автоматизированные системы обработки информации»
очной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2019

УДК 519.6
ББК 22.176
М 48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления»
«26» марта 2019 г., протокол № 10

Составители: д-р техн. наук, доц. А. И. Якимов;
канд. техн. наук Е. А. Якимов

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Изложены основные теоретические сведения по математическому описанию систем управления, включающие дифференциальные уравнения, передаточные функции, структурные схемы. Рассмотрены временные функции, частотные функции и характеристики, устойчивость непрерывных стационарных систем. Представлены практические задачи и примеры их решения, даны задачи для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЯ

Часть 2

Ответственный за выпуск	А. И. Якимов
Технический редактор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2019



Содержание

1 Дифференциальные уравнения и передаточные функции систем управления	4
2 Структурные схемы	8
3 Временные функции	12
3.1 Реакция на произвольное воздействие.....	12
3.2 Переходная и импульсная функции	14
4 Частотные функции и характеристики	18
4.1 Основные частотные характеристики.....	18
4.2 Физический смысл частотных характеристик	20
4.3 Асимптотические логарифмические амплитудные частотные характеристики	22
5 Устойчивость непрерывных стационарных систем.....	27
5.1 Математический и физический признаки устойчивости	27
5.2 Алгебраические критерии устойчивости.....	29
5.3 Частотные критерии устойчивости. Критерий Михайлова	31
5.4 Критерий Найквиста. Запасы устойчивости	33
Список литературы	34

1 Дифференциальные уравнения и передаточные функции систем управления

Поведение линейных, непрерывных, стационарных систем с сосредоточенными параметрами описывается во времени обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) с постоянными коэффициентами a_i, b_j

$$\begin{aligned} a_0 x_2^{(n)}(t) + \dots + a_{n-1} x_2^{(1)}(t) + a_n x_2(t) = \\ = b_0 x_1^{(m)}(t) + \dots + b_{m-1} x_1^{(1)}(t) + b_m x_1(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x_2(t)$ – выходная функция и ее производные (результат);

$x_1(t)$ – входная функция и ее производные, $x^{(i)} = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$;

a_i, b_j – постоянные параметры, $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$.

Порядок n дифференциального уравнения (1.1) определяет также и соответствующий порядок звена (системы).

В теории автоматического управления, наряду с (1.1), уравнения звеньев записывают в стандартной форме, когда коэффициенты при переменных x_2 и x_1 равны единице. Вынося за скобки a_n, b_m и вводя обозначения

$$K = \frac{b_m}{a_n}; \quad \frac{a_0}{a_n} = T_n^n; \quad \frac{a_1}{a_n} = T_{n-1}^{n-1}; \dots; \quad \frac{b_0}{b_m} = \tau_m^m; \quad \frac{b_1}{b_m} = \tau_{m-1}^{m-1}; \dots;$$

получают вид дифференциального уравнения в стандартной форме

$$\begin{aligned} T_n^n x_2^{(n)}(t) + T_{n-1}^{n-1} x_2^{(n-1)}(t) + \dots + x_2(t) = \\ = K \left[\tau_m^m x_1^{(m)}(t) + \dots + x_1(t) \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где T_i, τ_j – постоянные времени;

K – коэффициент передачи.

Уравнения (1.1) и (1.2) можно записать также в операторном (символическом) виде, вводя дифференциальный оператор $p = \frac{d}{dt}$ такой, что $p^i x(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$. Тогда уравнение (1.1) может быть записано в операторной форме как

$$[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n] x_2(t) = [b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m] x_1(t).$$

Обозначая $A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$, $B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$, будем иметь

$$A(p)x_2(t) = B(p)x_1(t).$$

Дифференциальный оператор $A(p)$ при выходной переменной x_2 называ-



ется *собственным оператором*, а дифференциальный оператор $B(p)$ при входной переменной x_1 – *оператором воздействия*. Отношение оператора воздействия к собственному оператору называется *передаточной функцией в операторной форме*:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Степень полинома знаменателя передаточной функции называют *порядком*, а разность между ее степенями знаменателя и числителя – *относительным порядком* или *относительной степенью* передаточной функции и соответствующей ей системы.

Нулями и полюсами передаточной функции $W(p)$ называют нули ее числителя и знаменателя соответственно, т. е. корни уравнений $B(p) = 0$ и $A(p) = 0$, где p рассматривается как переменная, а не как оператор.

Важнейшей характеристикой является передаточная функция (ПФ), получаемая на основе применения преобразования Лапласа к исходному дифференциальному уравнению системы. Для записи передаточной функции используется комплексная переменная Лапласа $s = \sigma + j\omega = \alpha + j\beta$. Передаточная функция системы управления в изображениях Лапласа $W(s)$ может быть определена по ее передаточной функции в операторной форме $W(p)$ следующим образом:

$$W(s) = W(p)|_{p=s}.$$

Если передаточная функция $W(p)$ содержит одинаковые нули и полюса, то элементарные множители, соответствующие этим корням в числителе и знаменателе, после подстановки $p = s$ должны быть сокращены.

При нулевых начальных условиях передаточная функция может быть получена и как отношение реакции (выходного сигнала) системы к входному сигналу, записанных в виде изображений Лапласа.

ПФ может быть записана триадой: корни многочлена числителя (нули), корни многочлена знаменателя (полюса) и общий коэффициент усиления. На комплексной плоскости нули обозначают кружком, полюса – крестиком; общий коэффициент усиления отобразить невозможно, и он должен указываться отдельно.

Пример 1 – Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями $\dot{y} + y = u$; $\ddot{y} - y = \dot{u} - u$.

Решение

В символической форме уравнения записываются в виде

$$(p + 1)y = u; (p^2 - 1)y = (p - 1)u,$$

а их передаточные функции в операторной форме соответственно



$$W_1(p) = \frac{1}{p+1}; W_2(p) = \frac{p-1}{p^2-1}.$$

Передаточные функции в изображениях Лапласа

$$W_1(s) = W_1(p)|_{p=s} = \frac{1}{s+1};$$

$$W_2(s) = W_2(p)|_{p=s} = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}.$$

Как видим, передаточные функции в изображениях Лапласа рассматриваемых звеньев совпадают, хотя они описываются разными дифференциальными уравнениями, и общие решения однородных уравнений, описывающие свободные движения систем, отличаются между собой.

Пример 2 – Найти передаточную функцию системы по известному дифференциальному уравнению (начальные условия – нулевые)

$$4\ddot{x}_2(t) + 2\dot{x}_2(t) + 10x_2(t) = 5x_1(t).$$

Решение

Приведя уравнение к стандартной форме, имеем

$$0,4 \cdot \ddot{x}_2(t) + 0,2 \cdot \dot{x}_2(t) + x_2(t) = 0,5 \cdot x_1(t).$$

Запишем полученное уравнение в операторной форме, используя преобразование Лапласа:

$$[0,4s^2 + 0,2s + 1]x_2(s) = 0,5x_1(s).$$

Тогда передаточная функция будет иметь вид:

$$W(s) = \frac{x_2(s)}{x_1(s)} = \frac{0,5}{0,4 \cdot s^2 + 0,2 \cdot s + 1}.$$

Пример 3 – При единичном скачке $1(t)$ на входе реакция звена описывается функцией $2(1 - e^{-3t}) \cdot 1(t)$. Найти передаточную функцию звена.

Решение

Преобразуем по Лапласу входной и выходной сигналы, пользуясь таблицей соответствия оригиналов и изображений [1, приложение А]. Изображение входного воздействия $X(s) = 1/s$, изображение реакции звена после приведения к общему знаменателю

$$Y(s) = 2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right) = \frac{2(s+3-s)}{s(s+3)} = \frac{6}{s(s+3)}.$$



Здесь единичный скачок не учитываем, хотя он и имеется в исходной функции, т. к. это просто указание на то, что сигнал на выходе появился скачком. Такое указание может и отсутствовать.

Делим изображение реакции на изображение входного воздействия и получаем передаточную функцию звена

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{6}{s(s+3)}}{\frac{1}{s}} = \frac{6}{s+3}.$$

Пример 4 – Система имеет нуль -3 , комплексные сопряженные полюса $-2 \pm j$ и коэффициент усиления $K = 5$. Определить ПФ системы после ее замыкания единичной отрицательной обратной связью (ООС).

Решение

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = 5 \frac{s+3}{(s+2)^2 + 1^2} = \frac{5s+15}{s^2+4s+5}.$$

Добавляя к знаменателю числитель, получаем ПФ замкнутой системы

$$W(s) = \frac{5s+15}{s^2+4s+5+5s+15} = \frac{5s+15}{s^2+9s+20}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить передаточные функции в операторной форме систем управления, которые описываются следующими уравнениями (y – выход, u – вход):

- | | |
|---|--|
| а) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 4\dot{y} + 3y = 7\ddot{u} + 5\dot{u} + 4u;$ | е) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3\dot{y} = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u;$ |
| б) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 5\dot{u} + u;$ | ж) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6\dot{y} = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u;$ |
| в) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3\dot{y} + y = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u;$ | з) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2\dot{y} = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u;$ |
| г) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 15\dot{y} = \ddot{u} + 5\dot{u} + 4u;$ | и) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 15\dot{y} + y = \ddot{u} + 5\dot{u} + 4u;$ |
| д) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4\dot{y} = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u;$ | к) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4\dot{y} + y = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u.$ |

2 Определить передаточные функции в изображениях Лапласа систем управления, которые описываются уравнениями, приведенными в задаче 1.

3 Записать дифференциальные уравнения систем управления с одним выходом y и двумя входами u и v , передаточные функции которых имеют следующий вид:

а) $W_u(p) = \frac{5p+4}{p^3+2p^2+4p+3};$	$W_v(p) = \frac{p+2}{p^3+2p^2+4p+3};$
б) $W_u(p) = \frac{3p+2}{p^3+4p^2+3p};$	$W_v(p) = \frac{3}{p^3+4p^2+3p};$



$$\text{в) } W_u(p) = \frac{5p+2}{2p^3+4p+3};$$

$$W_v(p) = \frac{p+3}{2p^3+4p+3};$$

$$\text{г) } W_u(p) = \frac{p+4}{3p^3+5p^2+p};$$

$$W_v(p) = \frac{5}{3p^3+5p^2+p};$$

$$\text{д) } W_u(p) = \frac{5p+4}{6p^3+4p^2+3p+1};$$

$$W_v(p) = \frac{2p+1}{6p^3+4p^2+3p+1};$$

$$\text{е) } W_u(p) = \frac{5p+4}{p^3+3p^2+2p};$$

$$W_v(p) = \frac{4}{p^3+3p^2+2p};$$

$$\text{ж) } W_u(p) = \frac{4}{p^3+8p^2+15p};$$

$$W_v(p) = \frac{5p+4}{p^3+8p^2+15p};$$

$$\text{з) } W_u(p) = \frac{p+4}{p^3+8p^2+15p+1};$$

$$W_v(p) = \frac{p+4}{p^3+8p^2+15p+1}.$$

4 Записать передаточную функцию системы с картой нулей-полюсов (рисунок 1) и общим коэффициентом передачи $K = 1,2$ (кратных корней нет).

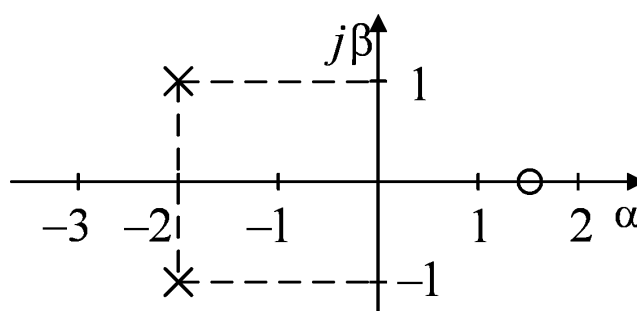


Рисунок 1 – Нули и полюса системы

2 Структурные схемы

Как правило, по структурной схеме при известных функциях передачи отдельных звеньев требуется найти эквивалентную передаточную функцию (ПФ) некоторого объединения звеньев (объекта, регулятора) или всей системы в целом. Для этого используют правила преобразования последовательного, параллельного и встречно-параллельного (с обратной связью) соединений.

Эквивалентная передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев.

Эквивалентная передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций этих звеньев (с учетом знака входа сумматора на пути сигнала).

Путь от входа к выходу системы называется прямой связью, от выхода к входу – обратной. Если сигнал на пути меняет знак (обычно на инвертирующем входе сумматора), обратная связь называется отрицательной (ООС), если не меняет – положительной (ПОС). Замкнутый путь называется контуром, напри-

мер, замкнутый контур обратной связи (ЗКОС). Эквивалентная передаточная функция соединения с обратной связью равна дроби, в числителе которой записана ПФ звена на прямом пути, а в знаменателе – единица минус произведение ПФ звеньев по замкнутому контуру обратной связи. Особенности этого вида соединения звеньев: если в системе есть хоть одна обратная связь, передаточная функция системы будет всегда представлять собой дробь; знак перед произведением ПФ звеньев в знаменателе обычно противоположен знаку обратной связи.

Для систем с перекрещивающимися связями применяют правило переноса: в переносимую ветвь вводят фиктивное звено с передаточной функцией, равной ПФ потерянного или обратной ПФ появившегося при переносе элемента.

Порядок вычисления передаточной функции многоконтурной системы следующий:

- 1) путем переноса узлов и сумматоров освободиться от перекрестных связей;
- 2) используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, преобразовать многоконтурную систему в одноконтурную;
- 3) по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы определить искомую передаточную функцию.

Пример – Определить передаточную функцию схемы (рисунок 2).

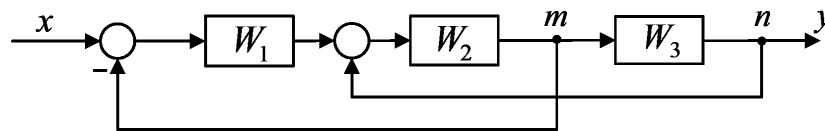


Рисунок 2 – Структурная схема системы управления

Решение

Видно, что без преобразований нельзя начинать сворачивать схему, в частности, нельзя объединить звенья W_2 и W_3 , как последовательно включенные, из-за связи в точке m . Перенесем ветвь из узла m в узел n (рисунок 3).

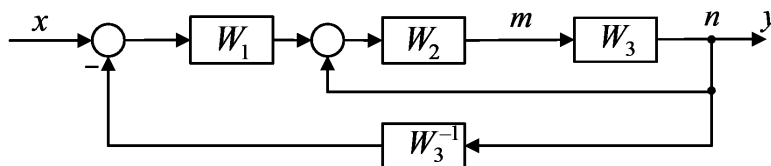


Рисунок 3 – Структурная схема после преобразования

В исходной схеме на пути от точки m к входному сумматору не было звеньев, преобразующих сигнал, а в новой схеме на пути между теми же точками появляется звено с передаточной функцией W_3 . Следовательно, в цепь переносимого воздействия нужно ввести фиктивное звено с обратной передаточной функцией, т. е. $1/W_3$.

После переноса начнем свертывание схемы, заменяя каждый раз несколько звеньев одним эквивалентным и увеличивая границы преобразуемого участка. Промежуточные (вспомогательные) ПФ обычно индексируют римскими циф-

рами, их используют временно и обязательно заменяют в итоге на ПФ с реально существующими индексами:

$$W^I = W_2 W_3; \quad W^{II} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3};$$

$$W = \frac{\frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3}}{1 + \frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3} \cdot \frac{1}{W_3}} = \frac{\frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3}}{\frac{1 - W_2 W_3 + W_1 W_2}{1 - W_2 W_3}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 - W_2 W_3 + W_1 W_2}.$$

Конечный результат всегда представляется в виде простой рациональной дроби и выражается только через исходные передаточные функции. Сигнал не может пройти через одну и ту же точку дважды, поэтому появление в выражении кратных величин вида $2W_i$ или W_i^2 и тому подобных является признаком допущенной при преобразованиях ошибки.

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 4).

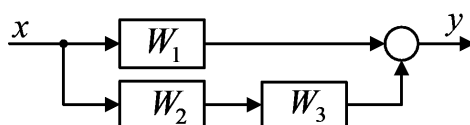


Рисунок 4 – Структурная схема к задаче 1

2 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 5).

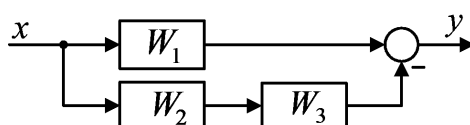


Рисунок 5 – Структурная схема к задаче 2

3 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 6).

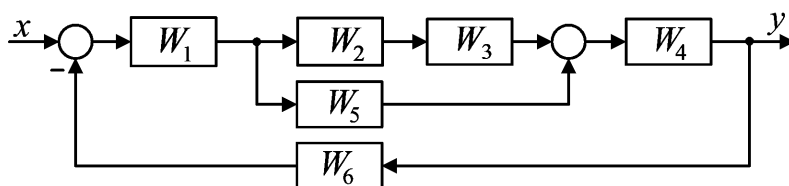


Рисунок 6 – Структурная схема к задаче 3

4 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 7).

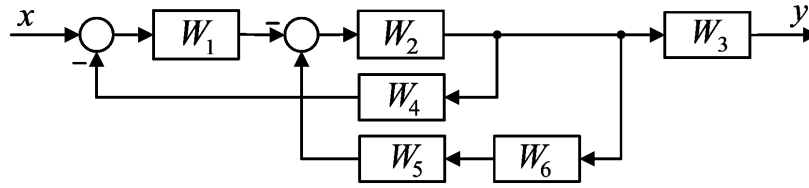


Рисунок 7 – Структурная схема к задаче 4

5 Найти эквивалентную передаточную функцию схемы (рисунок 8).

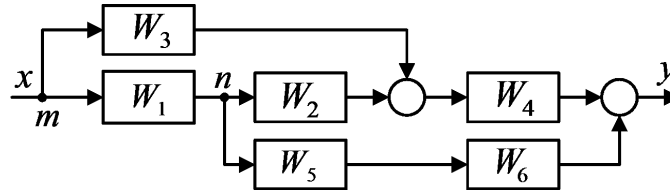


Рисунок 8 – Структурная схема к задаче 5

6 Для системы на рисунке 9 определить следующие передаточные функции (ПФ):

- а) W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y ;
- б) W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x ;
- в) W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e ;
- г) W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y ;
- д) W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x ;
- е) W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e .

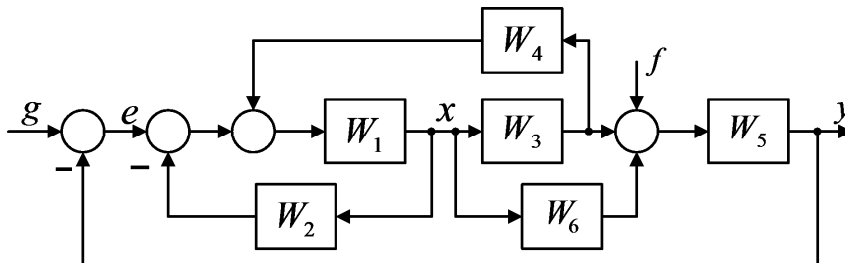


Рисунок 9 – Структурная схема к задаче 6

7 Для системы на рисунке 10 определить передаточные функции (ПФ) в соответствии с задачей 6.

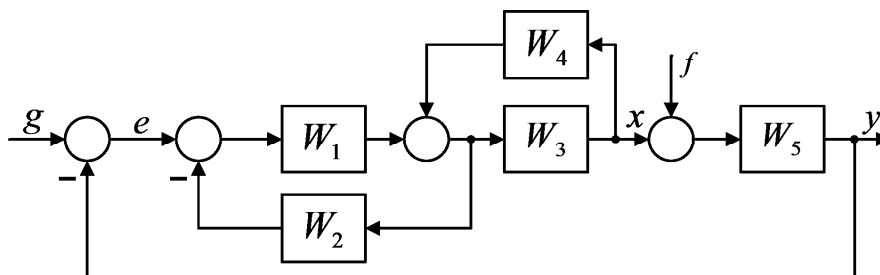


Рисунок 10 – Структурная схема к задаче 7

8 Для системы на рисунке 11 определить передаточные функции (ПФ) в соответствии с задачей 6.

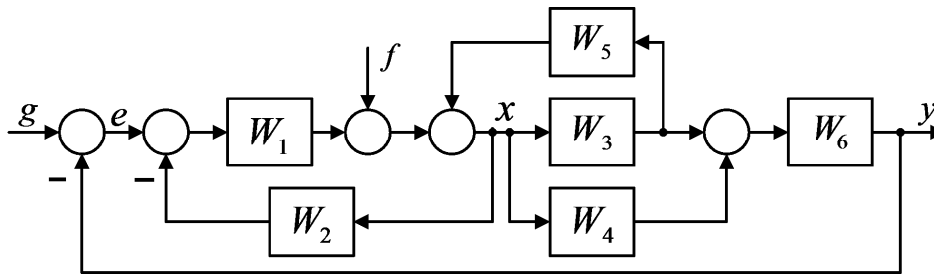


Рисунок 11 – Структурная схема к задаче 8

3 Временные функции

3.1 Реакция на произвольное воздействие

Для решения дифференциального уравнения (нахождения реакции системы) с помощью преобразования Лапласа необходимо:

- найти корни характеристического уравнения

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0;$$

- найти изображение реакции умножением ПФ на изображение входа по Лапласу $Y(s) = X(s) \cdot W(s)$ и записать его в виде суммы простых дробей по теореме разложения в соответствии с корнями характеристического уравнения;
- найти коэффициенты числителей дробей (вычеты в полюсах);
- найти оригинал для каждой дроби по таблице соответствия [1, приложение А] и записать решение в виде суммы отдельных оригиналов.

Рекомендуется:

- перед вычислением корней обязательно нормировать ПФ по старшему коэффициенту при s^n знаменателя;
- не сокращать существующие нули и полюса с положительной действительной частью, ведущие к неустойчивости системы, если их части не являются целыми числами; остальные нули и полюса могут быть сокращены перед переходом во временную область;
- для кратных полюсов записывать дробями все степени корня от наибольшей до первой в порядке их убывания;
- комплексные сопряженные корни представлять одним общим квадратным трехчленом.

После разложения на простые дроби и вычисления вычетов следует проверить правильность результата. Первое правило проверки – сумма дробей правой части должна быть равна изображению в левой части равенства. Второе правило проверки – сумма всех составляющих оригинала при $t = 0$ (начальное значение оригинала) в соответствии со свойствами преобразования Лапласа должна быть

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \cdot s.$$

Пример 1 – Используя преобразование Лапласа, найти оригинал реакции на воздействие e^{-2t} системы с ПФ $W(s) = 4e^{-s}/(s + 2)$.

Решение

Находим изображение Лапласа входного воздействия $X(s) = 1/(s + 2)$, умножаем его на передаточную функцию системы, получаем изображение реакции

$$Y(s) = \frac{4e^{-s}}{(s+2)^2}.$$

При переходе от изображения к оригиналу коэффициент 4 сохраняется, полюс -2 образует составляющую e^{-2t} , а поскольку он кратный (два одинаковых корня), то появляется составляющая t , и, наконец, оператор сдвига $e^{-s\tau}$ при $\tau = 1$ создает запаздывание во времени, которое отображается скачком со сдвигом вида $1(t - \tau)$ или, в данном случае, $1(t - 1)$. Окончательно оригинал

$$y(t) = 4te^{-2t} \cdot 1(t - 1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить реакцию на воздействие $1(t)$ объекта с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{20}{(s + 1)(2s + 1)(10s + 1)}.$$

2 Записать изображение реакции на воздействие $x(t) = t^2$, определить коэффициент передачи в установившемся режиме для объекта

$$100 \frac{d^3 y}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 0,1y = 50 \frac{dx}{dt} + 5x.$$

3 Система имеет коэффициент усиления $K = 5$, нуль -2 и полюса -1 , -5 и -10 . Определить реакцию на воздействие $r(t) = \delta(t)$.

4 Найти реакцию системы (рисунок 12) на единичный скачок при нулевых начальных условиях.

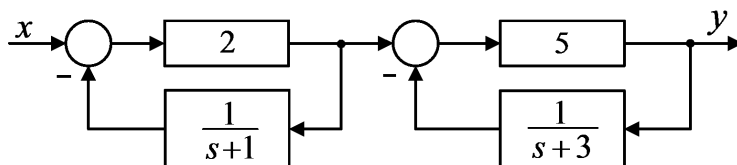


Рисунок 12 – Структурная схема к задаче 4



5 Найти с помощью преобразования Лапласа вынужденную составляющую переходного процесса от воздействия $x(t) = t$:

$$0,2y'' + 1,2y' + y = 2x.$$

3.2 Переходная и импульсная функции

Переходной функцией $h(t)$ называется реакция системы на единичный скачок при нулевых начальных условиях. Реакция на скачок произвольной величины называется кривой разгона.

Импульсной (весовой) функцией $g(t)$ или $w(t)$ называется реакция системы на единичный импульс при нулевых начальных условиях. Она является оригиналом передаточной функции.

Поскольку всегда $Y(s) = X(s) \cdot W(s)$, то

$$h(t) : H(s) = L\{1(t)\} \cdot W(s) = \frac{1}{s} \cdot W(s) = W(s)/s;$$

$$g(t) : G(s) = L\{\delta(t)\} \cdot W(s) = 1 \cdot W(s) = W(s).$$

Для оценки начального и конечного значений переходной характеристики объекта нужно найти отношение коэффициентов при s в степени n числителя и знаменателя ПФ в первом случае и отношение свободных членов передаточной функции во втором (если объект устойчив).

Начальное значение

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(s) \cdot s}{s} = \begin{cases} 0 & \text{при } m < n; \\ \frac{b_0}{a_0} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Конечное значение

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W(s) \cdot s}{s} = \frac{b_m}{a_n} = K_{уст}.$$

Связь между импульсной и переходной функциями определяется соотношением $G(s) = H(s) \cdot s$, откуда

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}; \quad h(t) = \int_0^\infty g(t) dt.$$

Иначе говоря, импульсная функция является производной по времени от переходной функции.

Пример 2 – Для системы $y'' + 2y' + 3y = 3u'' + 2u' + u$ найти $h(0)$ и $K_{уст}$.

Решение

Поскольку порядок многочлена числителя ПФ $m = 2$ равен порядку многочлена знаменателя $n = 2$, начальное значение переходной функции



$h(0) = b_0/a_0 = 3/1 = 3$. Коэффициент усиления в установившемся режиме $K_{уст} = b_m/a_n = 1/3 = 0,333$.

Пример 3 – Определить передаточную функцию объекта регулирования, если его весовая функция $g(t) = 3 + 2e^{-t} + e^{-4t}$.

Решение

По таблице соответствия [1, приложение А] находим изображение весовой функции (а это уже и есть передаточная функция объекта)

$$G(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+4}.$$

Приведя все дроби к общему знаменателю, получим ПФ в стандартном виде

$$W(s) = G(s) = \frac{4s^2 + 22s + 12}{s(s+1)(s+4)} = \frac{4s^2 + 22s + 12}{s^3 + 5s^2 + 4s}.$$

Пример 4 – Найти весовую функцию системы, если переходная функция $h(t) = 4(1 - e^{-0,3t})$.

Решение

Весовая функция равна производной по времени от переходной, поэтому $g(t) = 1,2e^{-0,3t}$.

Другой путь решения – через преобразование Лапласа:

$$H(s) = L\{4(1 - e^{-0,3t})\} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+0,3} = \frac{4s + 1,2 - 4s}{s(s+0,3)} = \frac{1,2}{s(s+0,3)},$$

убираем нулевой корень s в знаменателе, принадлежащий входному воздействию – скачку, получаем ПФ или изображение весовой функции $1,2/(s+0,3)$, откуда весовая функция

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1,2}{s+0,3}\right\} = 1,2e^{-0,3t}.$$

Пример 5 – Найти передаточную функцию $W(s)$ системы по известной функции веса $w(t) = 5 \cdot t$.

Решение

Используя связь между передаточной функцией и функцией веса $W(s) = L\{w(t)\}$, получим $W(s) = L\{5 \cdot t\} = 5/s^2$.

Пример 6 – По передаточной функции системы $W(s) = K_1/s + K_2$ найти её реакцию на единичный скачок (переходную функцию).

Решение

Как следует из условия, звенья с передаточными функциями K_1/s и K_2 соединены параллельно. По принципу суперпозиции, справедливому



для линейных систем, имеем

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t),$$

где $h(t)$ – переходная функция всей системы;

$h_1(t)$ – переходная функция интегрирующего звена;

$h_2(t)$ – переходная функция усилительного звена.

Известно, что $h_1(t) = K_1 \cdot t$, $h_2(t) = K_2 \cdot 1(t)$. Тогда

$$h(t) = K_1 \cdot t + K_2 \cdot 1(t).$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Записать изображение весовой функции системы с

$$h(t) = 0,16 - 0,16e^{-5t} + 0,2t.$$

2 Вычислить $h(t)$ системы (рисунок 13), если $K = 9$.

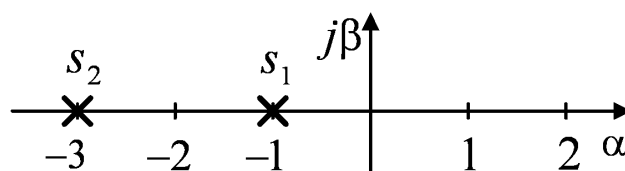


Рисунок 13 – Нули и полюса системы к задаче 2

3 Весовая функция системы

$$g(t) = 0,02(e^{-0,5t} - e^{-0,2t}).$$

Записать изображение переходной функции.

4 Найти изображение весовой функции (рисунок 14).

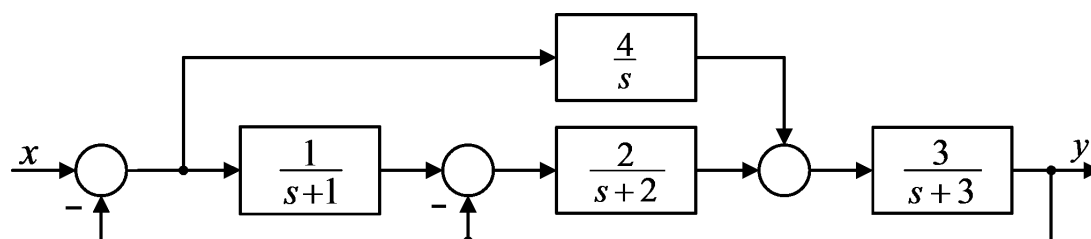


Рисунок 14 – Структурная схема системы к задаче 4

5 Записать $h(t)$ фильтра по выходу a (рисунок 15) при значениях параметров $k_1 = 1$, $k_2 = 12$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0,1$.

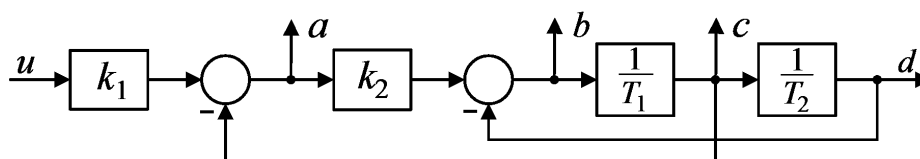


Рисунок 15 – Структурная схема фильтра к задаче 5



6 Записать $g(t)$ фильтра по выходу c (см. рисунок 15) при значениях параметров $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 12$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0,1$.

7 Найти оригинал передаточной функции объекта (рисунок 16).

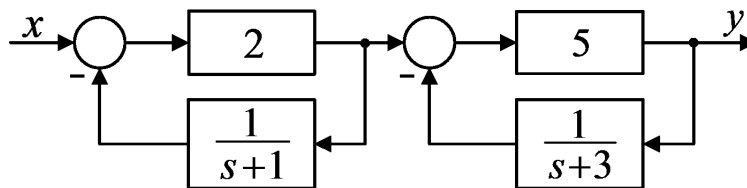


Рисунок 16 – Структурная схема объекта к задаче 7

8 Найти передаточную функцию $W(s)$ системы по известной функции веса $w(t) = 12$.

9 Найти передаточную функцию $W(s)$ системы по известной функции веса $w(t) = (K/T) \cdot e^{-t/T}$.

10 Найти передаточную функцию $W(s)$ системы по известной функции веса $w(t) = 4t^2$.

11 По передаточной функции системы

$$W(s) = \frac{4}{s} + \frac{5}{2s+1} + 2(4s+1)$$

найти её реакцию на единичный скачок (переходную функцию).

12 По передаточной функции системы

$$W(s) = k_1 + k_2 s + \frac{k_3}{s}$$

найти её реакцию на единичный скачок (переходную функцию).

13 По передаточной функции системы

$$W(s) = \frac{2}{s} + (8s+1) + \frac{4}{5s+1}$$

найти её реакцию на единичный скачок (переходную функцию).

4 Частотные функции и характеристики

4.1 Основные частотные характеристики

В ПФ по Лапласу аргументом является комплексная величина $s = \sigma + j\omega$. ПФ по Фурье, именуемая частотной ПФ, является частным случаем преобразования Лапласа, когда $\sigma = 0$ и, следовательно, $s = j\omega$. Ее нетрудно получить, если использовать мнемоническое правило

$$W(s) \rightarrow W(j\omega).$$

Частотная ПФ является комплекснозначной функцией от действительной переменной ω , называемой *частотой*. При этом частотная ПФ может быть определена:

– в прямоугольной форме

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega);$$

– в показательной

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)};$$

– в тригонометрической

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)],$$

где $A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$;

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \text{ при } |\arg W(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

На комплексной плоскости частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяет вектор (рисунок 17), длина которого равна $A(\omega)$, а аргумент – углу $\varphi(\omega)$, образованному этим вектором с положительной действительной полуосью. Кривую, описываемую концом вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ или от $-\infty$ до ∞ , называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ). АФЧХ, получаемую при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ , называют также *диаграммой Найквиста*.

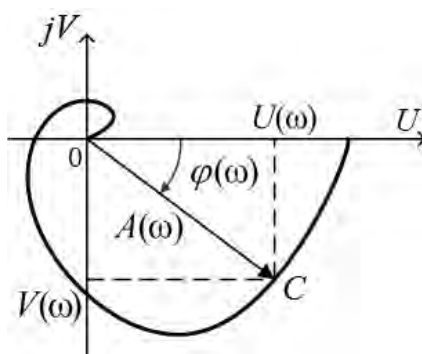


Рисунок 17 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ называют *амплитудной частотной функцией*, ее график – *амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)*. Аргумент $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ называют *фазовой частотной функцией*, а его график (при изменении ω от 0 до ∞) – *фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)*.

Частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ называют также *амплитудно-фазовой частотной функцией*. Ее действительную $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ и мнимую $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ части называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной функцией*, а их графики – кривые зависимостей $U(\omega)$ и $V(\omega)$ – *вещественной (ВЧХ) и мнимой частотной характеристикой (МЧХ)* соответственно.

Кроме перечисленных частотных характеристик, имеются *логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)*: *логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ)* и *логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ)*.

Функцию $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ называют *логарифмической амплитудной частотной функцией*, а график зависимости функции $L(\omega)$ от логарифма частоты $\lg \omega$ – *логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ)*. При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают значение частоты в логарифмическом масштабе и при этом на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, записывают значение ω , по оси ординат откладывают и записывают значение $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $\lg \omega$. При ее построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg \omega$, записывают значение ω .

В ЛЧХ единицей функции $L(\omega)$ является *децибел*, а единицей $\lg \omega$ – *декада*. *Декадой* называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что частота изменилась на одну декаду.

Определенные трудности представляет вычисление фазовой частотной функции. Если эта функция по модулю не превышает $\pi/2$, то она определяется по формуле $\varphi(\omega) = \arctg[V(\omega)/U(\omega)]$. В общем случае нужно разложить числитель и знаменатель передаточной функции на элементарные множители и определять фазовую частотную функцию по правилу вычисления аргумента произведения и частного комплексных чисел.

Пример 1 – Найти АЧХ и ФЧХ по известной передаточной функции системы $W(s) = \frac{2}{4s + 1}$.

Решение

Если записать

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$ – действительная часть;

$V(\omega)$ – мнимая часть,

то АЧХ и ФЧХ определяются соответственно по формулам



$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

Часто $W(j\omega)$ представляет собой дробь

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{G(j\omega)} = \frac{U_1(\omega) + jV_1(\omega)}{U_2(\omega) + jV_2(\omega)}.$$

Тогда, используя известные в теории комплексных чисел соотношения и подставив исходную ПФ, получим

$$A(\omega) = \frac{|R(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{\sqrt{U_1^2(\omega) + V_1^2(\omega)}}{\sqrt{U_2^2(\omega) + V_2^2(\omega)}} = \frac{2}{\sqrt{16\omega^2 + 1}},$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg R(j\omega) - \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V_1(\omega)}{U_1(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{V_2(\omega)}{U_2(\omega)} = \\ &= 0 - \operatorname{arctg} 4\omega = -\operatorname{arctg} 4\omega. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Найти АЧХ и ФЧХ по известной передаточной функции системы:

а) $W(s) = \frac{5}{s};$

в) $W(s) = \frac{8}{5s+1};$

б) $W(s) = 10(2s+1);$

г) $W(s) = \frac{10s+1}{4s+1}.$

2 Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции и переходную функцию звена:

а) пропорционального;

д) апериодического;

б) дифференцирующего;

е) форсирующего второго порядка;

в) интегрирующего;

ж) колебательного.

г) форсирующего;

4.2 Физический смысл частотных характеристик

При гармоническом входном воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная переменная также изменяется по гармоническому закону с той же частотой, но с другими амплитудой и фазой; амплитуда равна амплитуде входного сигнала, умноженной на модуль частотной передаточной функции, а сдвиг фазы – ее аргументу. Поэтому если система с передаточной функцией $W(s)$ устойчива, то при входном воздействии

$$u = u_m \cos(\omega t + \alpha)$$



после окончания переходного процесса выходной сигнал

$$y = |W(j\omega)|u_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi(\omega)),$$

где u_m – постоянная амплитуда входного сигнала;

α – начальный сдвиг фазы;

$W(j\omega)$ – частотная передаточная функция рассматриваемой системы;

$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$.

Пример 2 – На вход системы подается сигнал $u = 2 \sin 3t$. Определить в установившемся режиме реакцию y системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(0,04s^2 + 0,2s + 1)}.$$

Решение

В данном случае частотная передаточная функция имеет вид:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{(j\omega + 1)(-0,04\omega^2 + 0,2j\omega + 1)},$$

при этом $\omega = 3$, $\omega < \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5$. Поэтому

$$A(3) = \frac{\sqrt{9 + 16}}{\sqrt{9 + 1}\sqrt{(1 - 0,36)^2 + 0,36}} \cong 1,8;$$

$$\varphi(3) = \arctg(3/4) - \arctg 3 - \arctg[0,6/(1 - 0,36)] \cong 1,36$$

и, соответственно, $y = 3,6 \sin(3t + 1,36)$.

Задачи для самостоятельного решения

1 На вход системы подается сигнал $u = 2 \sin 0,5t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при следующих передаточных функциях:

а) $W(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(0,04s^2 + 0,2s + 1)};$

е) $W(s) = \frac{2(s + 2)}{(s + 1)(0,09s^2 + 0,3s + 1)};$

б) $W(s) = \frac{3(s + 1)}{(s + 3)(0,16s^2 + 0,4s + 1)};$

ж) $W(s) = \frac{4(s + 3)}{(s + 1)(0,25s^2 + 0,5s + 1)};$

в) $W(s) = \frac{5(s + 3)}{(s + 1)(0,36s^2 + 0,6s + 1)};$

з) $W(s) = \frac{6(s + 4)}{(s + 1)(0,49s^2 + 0,7s + 1)};$

г) $W(s) = \frac{7(s + 4)}{(s + 2)(0,64s^2 + 0,8s + 1)};$

и) $W(s) = \frac{8(s + 5)}{(s + 3)(0,25s^2 + 0,7s + 1)};$

д) $W(s) = \frac{9(s + 5)}{(s + 2)(0,16s^2 + 0,56s + 1)};$

к) $W(s) = \frac{10(s + 5)}{(s + 4)(0,36s^2 + 0,84s + 1)}.$



2 На вход системы подается сигнал $u = 0,5 \sin 6t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при следующих передаточных функциях, приведенных в задаче 1.

3 На вход системы подается сигнал $x_1(t) = 5 \sin t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы при передаточной функции $W(s) = \frac{4}{s}$.

4 На вход системы подается сигнал $x_1(t) = 8 \sin 0,25t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы при передаточной функции $W(s) = \frac{10}{4s + 1}$.

5 На вход системы подается сигнал $x_1(t) = 2 \sin 10t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы при передаточной функции $W(s) = 2s$.

6 На вход системы подается сигнал $x_1(t) = 4 \sin 25t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы при передаточной функции $W(s) = 10(4s + 1)$.

7 На вход системы подается сигнал $x_1(t) = 3 \sin 4t$. Определить в установившемся режиме реакцию системы при передаточной функции $W(s) = \frac{2s + 1}{4s + 1}$.

4.3 Асимптотические логарифмические амплитудные частотные характеристики

Для упрощения при построении вручную действительную ЛАЧХ заменяют асимптотической, т. е. ломаной линией из прямых отрезков, имеющих стандартный наклон, кратный ± 20 дБ/дек.

Частоты пересечения отрезков ω_{ci} называются частотами сопряжения, они соответствуют корням ПФ. Частоты пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс ω_{cp} называются частотой среза, они соответствуют значению $\lg A(\omega) = 0$ или $A(\omega) = 1$ (усиление или ослабление сигнала на частоте среза отсутствует). Для удобства построения через значения сопрягающих частот проводят на графике вертикальные линии, а на свободном поле графика – вспомогательные линии со стандартными наклонами $k(-20)$ дБ/дек.

Частоты сопряжения находят по корням (постоянным времени T) простых дробей, на которые разбивают ПФ, или типовых звеньев, из которых состоит структурная схема системы регулирования.

Звено первого порядка (один действительный корень)

$$\frac{1}{Ts + 1} \rightarrow \omega_c = \left| \frac{1}{T} \right| \text{ или } \frac{1}{s + \alpha} \rightarrow \omega_c = |\alpha|.$$

Звено второго порядка (комплексные сопряженные корни)

$$\frac{1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \rightarrow \omega_c = \left| \frac{1}{T} \right|; \quad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$$

или



$$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \rightarrow \omega_c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \xi = |\alpha| \cdot T = \frac{|\alpha|}{\omega_c},$$

где ξ – показатель затухания (коэффициент демпфирования), характеризующий величину резонанса в звене.

При $\xi = 1$ резонанс отсутствует, при $\xi \rightarrow 0$ резонансный выброс h стремится к бесконечности. При значениях $\xi < 0,6$ асимптотическую ЛАЧХ корректируют на величину выброса h , определяемого по формуле $h = 20 \lg \left(\frac{l}{2\xi} \right) \cdot \frac{1}{2}$ (l – число одинаковых корней (кратность корня)).

Левую (начальную) часть ЛАЧХ (низкочастотную или НЧ – асимптоту) или ее продолжение проводят через точку с координатами $\lg \omega = 0$ ($\omega = 1$) и $L(\omega) = 20 \lg K$ слева направо с наклоном $\nu \cdot (-20 \text{ дБ/дек})$ до первой (наименьшей) частоты сопряжения. Здесь ν – степень астатизма, $\nu = r - l$; r – число нулевых корней знаменателя, l – числителя; K – добротность (отношение свободных членов полиномов числителя и знаменателя ПФ после удаления нулевых корней).

Двигаясь вправо, на каждой частоте сопряжения продолжают ЛАЧХ с отклонением от предыдущего направления: для корня числителя вверх (+20 дБ/дек); для корня знаменателя вниз (–20 дБ/дек). Если кратность корня $\nu \neq 1$, наклон асимптоты изменяется в l раз. Общий наклон ЛАЧХ в конце равен $(n - m) \cdot (-20 \text{ дБ/дек})$. Выбросы при комплексных корнях откладывают вверх – для корней знаменателя, вниз – для корней числителя, близкие выбросы суммируются графически.

ЛФЧХ устойчивых систем строят по шаблону, неустойчивых – по вычисляемым точкам. Приблизительно считают, что участку ЛАЧХ с наклоном $\pm 20 \text{ дБ/дек}$ соответствует фазовый сдвиг около $\pm 90^\circ$, а участку с наклоном $\pm 40 \text{ дБ/дек}$ – сдвиг на $\pm 180^\circ$; действительному корню знаменателя соответствует угол наклона ЛФЧХ на сопрягающей частоте $\varphi = -\arctg(\omega T) = -45^\circ$, комплексной паре – $\varphi = -\arctg \left(\xi \cdot \frac{2\omega T}{1 - \omega^2 T^2} \right)$.

Пример 3 – Построить асимптотическую ЛАЧХ для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{100s+100}{(s^2+0,1s)(0,1s^2+s+10)}.$$

Решение

Преобразуем передаточную функцию к виду

$$W(s) = \frac{100(s+1)}{s(10s+1)(0,01s^2+0,1s+1)}.$$

Логарифмическая амплитудная частотная функция



$$L(\omega) = 40 + 20\lg\sqrt{\omega^2 + 1} - 20\lg\sqrt{(10\omega)^2 + 1} - \\ - 20\lg\sqrt{(1 - 0,01\omega^2)^2 + (0,1\omega)^2}.$$

Вычислим сопрягающие частоты и пронумеруем их в порядке возрастания:

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0,1; \quad \omega_2 = 1; \quad \omega_3 = \frac{1}{0,1} = 10,$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 – сопрягающие частоты апериодического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно.

При построении асимптотических ЛАЧХ при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают), при частотах, больших сопрягающей частоты, – член с наивысшей степенью ω . Поэтому в рассматриваемом примере при $\omega < \omega_1$ имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20\lg\omega.$$

Это уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $\omega = 1$ и $L = 40$ с наклоном -20 дБ/дек (20 дБ/дек). Данное означает, что при увеличении частоты на декаду (т. е. в 10 раз) $L(\omega)$ уменьшается (увеличивается) на 20 дБ. Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте.

При $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ аналогично имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20\lg\omega - 20\lg(10\omega) = 20 - 40\lg\omega.$$

Это уравнение второй асимптоты. Ее наклон по отношению к первой асимптоте изменяется на -20 дБ/дек и обуславливается апериодическим звеном, т. е. множителем первого порядка в знаменателе рассматриваемой передаточной функции. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты под наклоном -40 дБ/дек.

При $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$

$$L(\omega) \approx 20 - 40\lg\omega + 20\lg\omega = 20 - 20\lg\omega.$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон по отношению ко второй асимптоте изменяется на 20 дБ/дек и обуславливается форсирующим звеном, т. е. множителем первого порядка в числителе. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты под наклоном -20 дБ/дек (рисунок 18).

При $\omega \leq \omega_3$

$$L(\omega) \approx 20 - 20\lg\omega - 20\lg(0,1\omega)^2 = 60 - 60\lg\omega.$$

Это уравнение последней, четвертой, асимптоты. Ее наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на -40 дБ/дек и обуславливается множителем второго порядка в знаменателе.



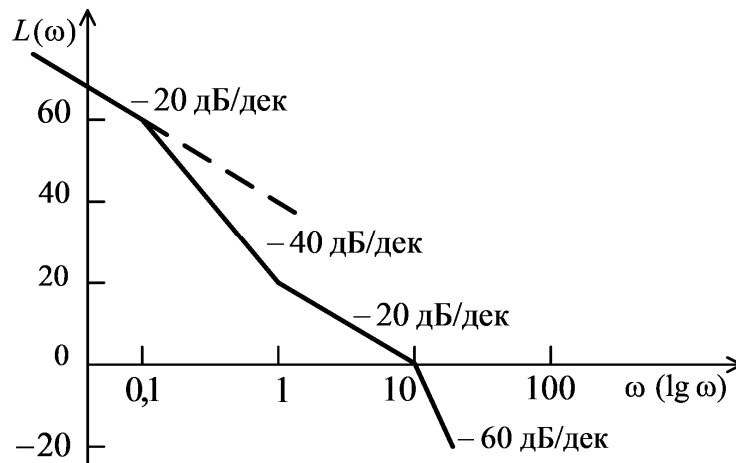


Рисунок 18 – Асимптотическая логарифмическая амплитудная частотная характеристика

Правило построения асимптотических ЛАЧХ

1 Вычислить $20\lg K$ и сопрягающие частоты $\omega_i = 1/T_i$, которые следует пронумеровать в порядке возрастания: $\omega_1 < \omega_2 < \dots$.

2 На оси абсцисс отметить сопрягающие частоты, а на координатной плоскости – точку ($\omega = 1, 20\lg K$). Построить первую асимптоту – прямую под наклоном -20 дБ/дек, проходящую через отмеченную точку на координатной плоскости. Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте ω_1 .

3 Построить вторую асимптоту, которая начинается с конца первой асимптоты и проводится до второй сопрягающей частоты ω_2 , а наклон изменяется на ± 20 дБ/дек или ± 40 дБ/дек в зависимости от того, обуславливается ли ω_1 элементарным множителем первого или второго порядка соответственно. Принимается положительный знак, если указанный множитель находится в числителе, и отрицательный, если этот множитель находится в знаменателе.

4 Построить остальные асимптоты, которые строятся аналогично второй асимптоте: i -я асимптота начинается с конца предыдущей $(i - 1)$ -й асимптоты и проводится до сопрягающей частоты ω_i . Ее наклон определяется сопрягающей частотой ω_{i-1} .

Последняя асимптота представляет собой прямую, которая начинается в конце асимптоты, соответствующей последней сопрягающей частоте, и уходит в бесконечность.

Задачи для самостоятельного решения

1 Построить асимптотические ЛАЧХ звеньев с передаточными функциями в задаче 1 (подразд. 4.2).

2 Записать передаточные функции динамических звеньев с асимптотическими ЛАЧХ на рисунке 19.

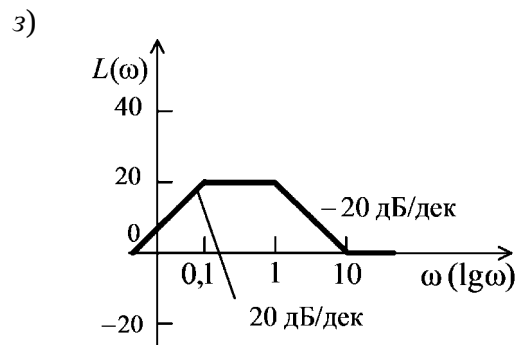
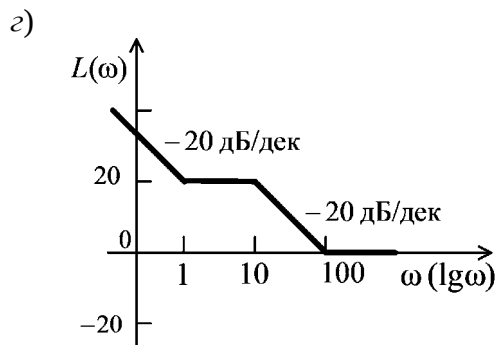
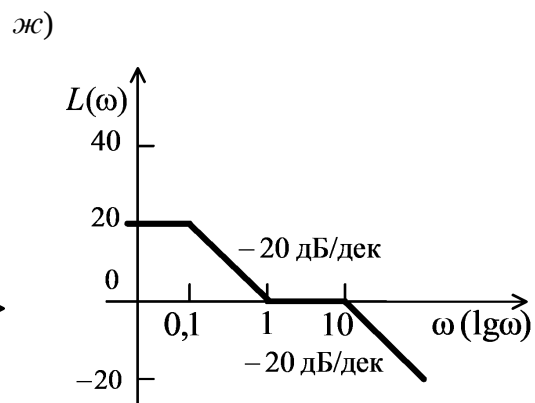
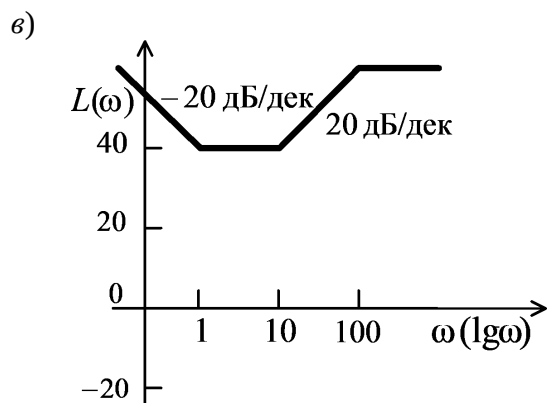
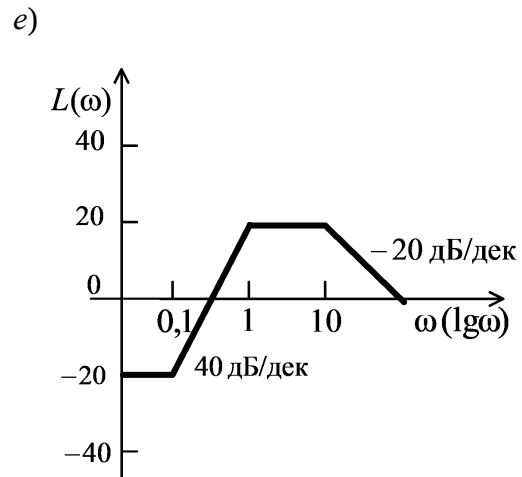
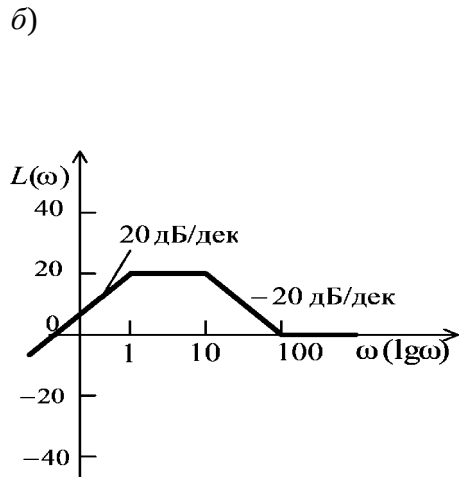
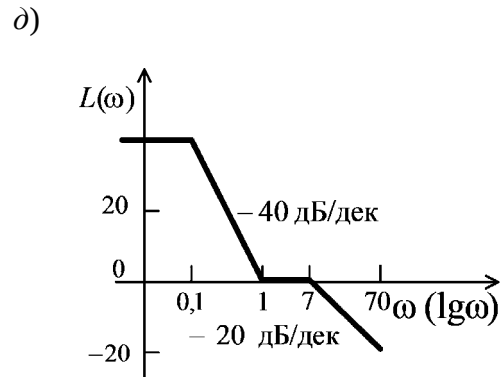
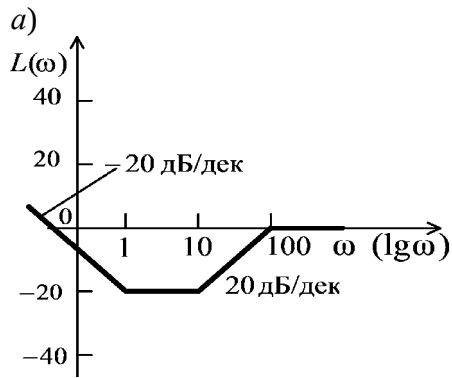
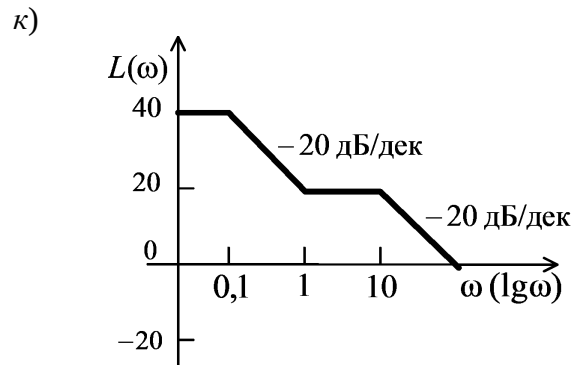
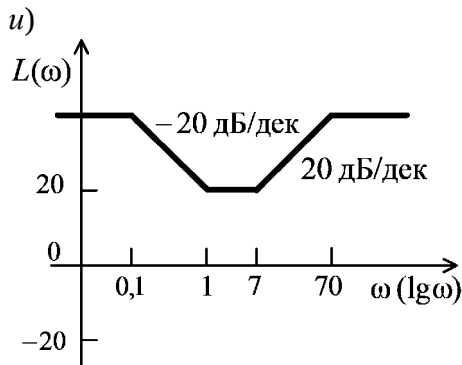


Рисунок 19 – Асимптотические ЛАЧХ к задаче 2



Окончание рисунка 19

5 Устойчивость непрерывных стационарных систем

5.1 Математический и физический признаки устойчивости

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после снятия воздействия, выведшего систему из этого состояния.

Математический (прямой) признак устойчивости: система устойчива, если все корни её характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, другими словами – если все полюса системы левые (лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости). Корни полинома числителя передаточной функции (нули) на устойчивость системы не влияют.

Если хотя бы один полюс располагается справа от мнимой оси, система неустойчива. Она находится на аperiодической границе устойчивости, если при остальных левых корнях имеет один нулевой корень, и на колебательной (периодической), если при остальных левых корнях характеристического уравнения имеет пару чисто мнимых корней (значение ω мнимой части таких корней равно частоте незатухающих колебаний системы на границе устойчивости).

Физический признак устойчивости: система устойчива, если свободная составляющая переходного процесса (импульсная функция $g(t)$) с увеличением времени стремится к нулю, неустойчива, если она стремится к бесконечности, и нейтральна (находится на границе устойчивости), если она стремится к некоторой постоянной величине (амплитуде). Для анализа подходит любая реакция системы, если из нее исключить составляющую, обусловленную вынуждающим сигналом.

Пример 1 – Оценить прямым методом устойчивость системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + 3y^{(1)} = 4u^{(1)} + 5u.$$

Решение

Характеристическое уравнение системы

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s = s(s^2 + 2s + 3) = 0$$

имеет нулевой корень $s_1 = 0$ и комплексную сопряженную пару корней, определяемую из квадратного трехчлена

$$s_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = -1 \pm j1,414.$$

Система находится на апериодической границе устойчивости, т. к. нулевой корень находится на мнимой оси комплексной плоскости корней, а остальные корни лежат слева от мнимой оси.

Задачи для самостоятельного решения

1 Оценить устойчивость системы, если

$$G(s) = \frac{A}{(s+0,1)^3} + \frac{B}{(s+0,1)^2} + \frac{C}{s+0,1} + \frac{D}{s+0,5} + \frac{Es+F}{s^2+2s+2}.$$

2 Система имеет нуль 10 и полюса $-1 \pm 3j$; 0; $-3,14$. Оценить устойчивость системы.

3 Оценить устойчивость системы (рисунок 20).

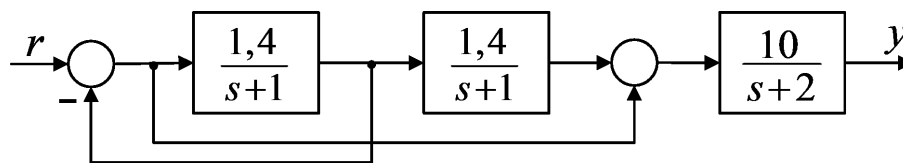


Рисунок 20 – Структурная схема к задаче 3

4 Систему образуют последовательно включенные звенья с передаточными функциями $1/(s+1)$, $3/(s+2,5)$, $1/(s+2)$. Определить частоту незатухающих колебаний.

5 При каком значении α система (рисунок 21) окажется на апериодической границе устойчивости?

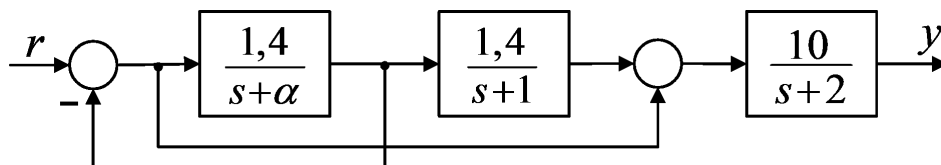


Рисунок 21 – Структурная схема к задаче 5

6 По переходной функции $h(t) = 5 - 10e^{-t} + 5e^{-2t}$ оценить устойчивость системы, используя физический признак.

7 Оценить устойчивость системы (рисунок 22).

8 Оценить устойчивость системы с $g(t) = 1,5e^{-t} - 1,5e^{-3t}$.

9 Какова устойчивость системы с $D(s) = s(s^2 + s + 1)$?

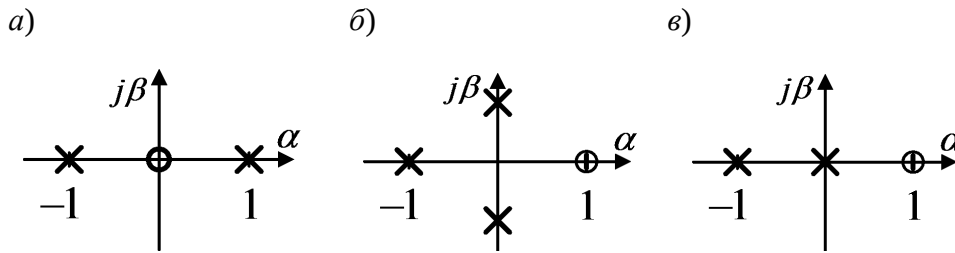


Рисунок 22 – Корневой портрет системы к задаче 7

5.2 Алгебраические критерии устойчивости

Критерий Гурвица: система устойчива, если все коэффициенты ее характеристического уравнения $D(s) = 0$ и все диагональные миноры $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ матрицы Гурвица положительны.

Для устойчивости систем первого и второго порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны (были одного знака). Достаточные условия для системы третьего порядка $\Delta_2 = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$, для системы четвертого порядка $\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 - a_1^2 \cdot a_4 = a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) > 0$. Критерий Гурвица удобно использовать при устном счете для систем не выше четвертого порядка.

Критерий Рауса: система устойчива, если все коэффициенты ее характеристического уравнения и все элементы первого столбца таблицы Рауса положительны. Необходимое условие (положительность всех коэффициентов) совпадает с критерием Гурвица.

Пример 2 – Оценить по критерию Гурвица устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s - 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Решение

Характеристическое уравнение $D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0$. Проверяем необходимое условие – все коэффициенты характеристического уравнения положительны, что можно кратко записать как «условие $a_i > 0$ выполняется».

Проверяем достаточное условие по определителю Гурвица:

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & 2 & 4 & 0 \\ \Delta_2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 2 > 0, \\ \Delta_2 &= 6 - 4 = 2 > 0. \end{aligned}$$

Оба диагональных минора положительны. Так как необходимое и достаточное условия выполняются, система устойчива.

Пример 3 – Оценить по Раусу устойчивость системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 5s + 6 = 0$.

Решение

Необходимое условие $a_i > 0$ выполняется. Проверяем достаточное условие – составляем таблицу Рауса: число строк равно числу коэффициентов (шесть), число столбцов $6/2 = 3$. Заполняем две первые строки попарно коэффициентами с четными a_0, a_2, a_4 и нечетными a_1, a_3, a_5 индексами (рисунок 23).

Последний коэффициент $a_n = a_5 = 6$ смещается вниз и влево ходом шахматного коня (три клетки вниз и одна влево), ниже него записываем нули. Вычисляем вспомогательное число и элементы третьей строки: $r_3 = c_{1,1}/c_{2,1} = a_0/a_1 = 1/2 = 0,5$; откуда $c_{31} = 3 - 4 \cdot 0,5 = 1$; $c_{32} = 5 - 6 \cdot 0,5 = 2$, затем рассчитываем элементы остальных строк. В первом столбце имеется отрицательное число, следовательно, система неустойчива. Число перемен знака в первом столбце равно двум (от 1 к $-\infty$ и от $-\infty$ к 6), значит, система имеет два правых корня характеристического уравнения, остальные три корня левые.

	1	3	5
	2	4	6
$r_3 = 0,5$	1	2	0
$r_4 = 2,0$	0	6	0
$r_5 = +\infty$	$-\infty$	0	0
	6	0	0

Рисунок 23 – Определение устойчивости по критерию Рауса

Задачи для самостоятельного решения

1 Оценить устойчивость системы

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + \dot{y} + 4y = 3u.$$

2 С помощью критерия Гурвица проверить устойчивость системы (рисунок 24), если $W_1 = 5/(1 + 10s)$, $W_2 = -1/s$, $W_3 = 100$.

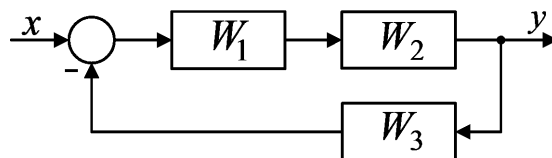


Рисунок 24 – Структурная схема к задаче 2

3 Система задана нулями $0 \pm 3j$ и полюсами $-1 + 5j$; -1 ; -10 . Оценить устойчивость системы до и после замыкания единичной ООС.

4 Устойчива ли система $D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^2 + 2s + 2 = 0$?

5 Оценить по критерию Рауса устойчивость системы

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 3s^4 + s^2 + 2s + 3 = 0.$$

6 Оценить устойчивость системы (рисунок 25) по критерию Гурвица.

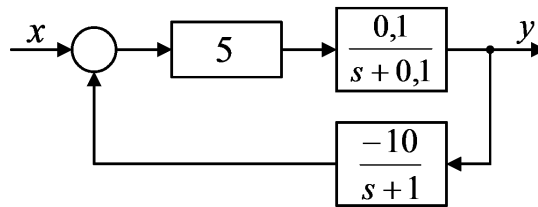


Рисунок 25 – Структурная схема к задаче 6

7 Оценить по критерию Гурвица устойчивость системы

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 5s + 2 = 0.$$

5.3 Частотные критерии устойчивости. Критерий Михайлова

Согласно принципу аргумента, известному в теории комплексной переменной, если среди n полюсов ПФ системы p расположены справа от мнимой оси, а остальные $(n - p)$ – слева, то полное изменение аргумента комплексной функции $D(j\omega)$

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - p) \cdot \pi / 2 - p \cdot \pi / 2 = (n - 2p) \cdot \pi / 2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

Отсюда следует, что линейная система n -го порядка устойчива, если при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности характеристический вектор системы $D(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол $n\pi/2$, не обращаясь нигде в ноль.

Конец вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты чертит характеристическую кривую (годограф Михайлова). На этом основана другая формулировка критерия, чаще используемая в инженерной практике: система n -го порядка устойчива, если кривая Михайлова, начинаясь при $\omega = 0$ на действительной положительной полуоси, проходит при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности последовательно против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости.

Пример 4 – Используя вторую форму (следствие) критерия Михайлова, оценить устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s - 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Решение

В характеристическом уравнении $D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0$ заменяем $s = j\omega$ и группируем действительную и мнимую части:

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 4 = 4 - 2\omega^2 + j\omega(3 - \omega^2),$$

где $(4 - 2\omega^2)$ – четная (действительная) функция $U(\omega)$;

$(3 - \omega^2)$ – нечетная (мнимая) функция $V(\omega)$.

Приравнивая поочередно четную и нечетную функции нулю, находим частоты 1,41 и 1,73, соответствующие пересечению кривой с осями координат, подставляем эти частоты в характеристическую функцию и заполняем таблицу 1.

Таблица 1 – Расчетные данные по критерию Михайлова

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	4	0
∞	$-\infty$	$-\infty$
$\sqrt{2} = 1,41$	0	1,41
$\sqrt{3} = 1,73$	-2	0

Строим графики четной и нечетной функций – они поочередно пересекают ось частот, т. е. их корни перемежаются, и общее число пересечений равно $n = 3$, следовательно, система устойчива (рисунок 26).

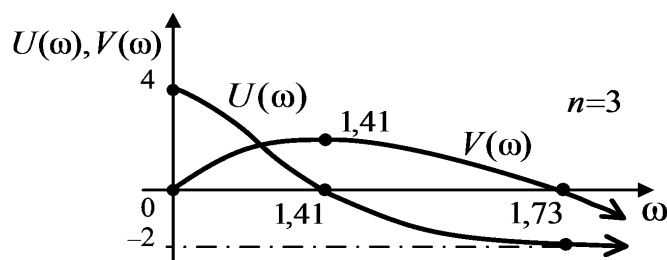


Рисунок 26 – Определение устойчивости по критерию Михайлова

Задачи для самостоятельного решения

1 Оценить устойчивость системы с характеристическим уравнением $D(s) = s^6 + 2s^5 + 3s^4 + s^2 + 2s + 3 = 0$.

2 Оценить устойчивость системы (рисунок 27) по второй форме критерия Михайлова при $W_1(s) = 1/(1 + s)$, $W_2(s) = 2$, $W_4(s) = 4$, $W_5(s) = 3/(1 + 10s)$, $W_6(s) = 10$.

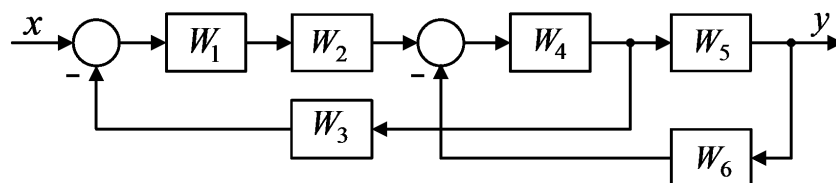


Рисунок 27 – Структурная схема системы к задаче 2

3 Оценить устойчивость по критерию Михайлова (форма 2) системы

$$D(s) = s^5 + s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 15s + 15 = 0.$$

4 Оценить устойчивость замкнутой системы по Михайлову (форма 2), если известно дифференциальное уравнение разомкнутой системы

$$0,04 \frac{d^4 y}{dt^4} + 0,5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 10y = 4 \frac{dx}{dt}.$$

5 По критерию Михайлова оценить устойчивость системы

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^6 + 5s^5 + 6s^4 + 4s^2 + 20s + 24}.$$

6 Найти по Михайлову частоту незатухающих колебаний после замыкания единичной ООС системы с дифференциальным уравнением

$$0,5 \frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^3 y}{dt^3} + 1,5 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 2 \frac{dx}{dt}.$$

5.4 Критерий Найквиста. Запасы устойчивости

Упрощенная формулировка: система, устойчивая в разомкнутом состоянии или нейтральная, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от нуля до плюс бесконечности не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$. Всегда подразумевается замыкание системы единичной ООС.

Общая формулировка: система после замыкания будет устойчивой, если АФЧХ разомкнутой системы охватывает в положительном направлении (против часовой стрелки) $p/2$ раз точку с координатами $(-1, j0)$, где p – число правых полюсов разомкнутой системы.

Оценка запасов устойчивости по АФЧХ. Запасы устойчивости по амплитуде A_m в относительных единицах равны расстоянию от критической точки $(-1, j0)$ до ближайших точек пересечения АФЧХ с отрицательной действительной полуосью. В децибелах запас устойчивости по амплитуде находят как величину, обратную амплитуде A вектора $W(j\omega)$ при угле -180° или $A_m = 20 \lg(1/A)$, где A – расстояние от точки пересечения АФЧХ с отрицательной действительной полуосью до начала координат. Норма – $A_m = 1 - A(\omega-\pi) \geq 0,5 \dots 0,6$ или $6 \dots 12$ дБ.

Запас устойчивости по фазе φ_m равен углу между отрицательной действительной полуосью и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения АФЧХ с дугой единичного радиуса. Запас по фазе $\varphi_m = \pi - |\omega_{ср}|$ находится в пределах от 0 до 180° , при проектировании обычно нормой является $\varphi_m \geq 30 \dots 60^\circ$.

Система устойчива в замкнутом состоянии, если обратная АФЧХ $1/W(j\omega)$ разомкнутой системы охватывает точку $(-1, j0)$.

Логарифмический критерий Найквиста (диаграмма Боде). Обычная формулировка: замкнутая система устойчива, если в момент пересечения ЛФЧХ разомкнутой системы линии -180° её ЛАЧХ отрицательна. Общая формулировка пригодна и для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии: замкнутая система устойчива, если на интервале положительности ЛАЧХ разомкнутой системы сумма переходов её ЛФЧХ линии -180° равна $p/2$, где p – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Оценка запасов устойчивости по ЛЧХ. Запас устойчивости по амплитуде A_m равен отклонению ЛАЧХ от нуля на ближайших к частоте среза $\omega_{ср}$ ча-



стотах пересечения ЛФЧХ с линией -180° . Запас устойчивости по фазе φ_m равен отклонению ЛФЧХ на частоте среза $\omega_{ср}$ от линии -180° к нулю.

Пример 5 – Оценить запасы устойчивости по АФЧХ после замыкания единичной ООС системы с $W(s) = 1/(s + 3s + 2)$.

Решение

Задача не требует построения АФЧХ. По критерию Гурвица следует, что в разомкнутом состоянии система устойчива, нулей нет, поэтому годограф Найквиста проходит два квадранта по часовой стрелке и не пересекает отрицательную действительную полуось. Таким образом, запас по амплитуде максимален $A_m = 1$. Полюса системы действительные -1 и -2 , следовательно, резонанс в системе отсутствует и амплитуда вектора $|W(j\omega)|$ нигде не превышает величины $K_{уст} = 1/2$, запас устойчивости по фазе $\varphi_m = 180^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

По критерию Найквиста исследовать устойчивость замкнутых систем, у которых передаточная функция в разомкнутом состоянии имеет вид в соответствии с задачей 1 (позразд. 4.2).

Список литературы

- 1 **Кудинов, Ю. И.** Теория автоматического управления (с использованием MATLAB – SIMULINK): учебное пособие / Ю. И. Кудинов, Ф. Ф. Пашенко. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2019. – 312 с.: ил.
- 2 **Ощепков, А. Ю.** Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB: учебное пособие / А. Ю. Ощепков. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2018. – 208 с.: ил.
- 3 **Гайдук, А. Р.** Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: учебное пособие / А. Р. Гайдук, В. Е. Беляев, Т. А. Пьявченко. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 464 с.: ил.
- 4 **Коновалов, Б. И.** Теория автоматического управления: учебное пособие / Б. И. Коновалов, Ю. М. Лебедев. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 224 с.: ил.

